数学クォータ科目「基礎数学Ⅰ」第１回

２次関数とそのグラフ

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

今回の授業で理解してほしいこと

- 関数とは何か
- 関数のグラフとは何か
- ２次関数とそのグラフ（放物線）
- ２次関数の最大値・最小値

関数とは

- ２つの変数 x, y がある.
  - 変数とは, いろいろな値をとる文字のこと.
  - 一方, 固定された値をとる文字のことを定数という.
- 変数 x の値を決めると, それに応じて y の値が決まるとき,

  「y は x の 関数 である」

  という.
- このとき, $\begin{cases} x & \text{を独立変数} \\ y & \text{を従属変数} \end{cases}$ という.
- 変数 y が独立変数 x の関数であることを, 一般的に $y = f(x)$ と書く.
  - f は「x に対して, $y(= f(x))$ を対応させる規則」と解釈できる.
  - 「x の関数」とは「x で記述される式 $f(x)$」と考えてよい.

関数の例

例１）円の半径と面積

- 半径が r の円がある.
- この円の面積を S とすると, $S = \pi r^2$ と表され, S は r の関数と考えることができる.

例２）直線上の等速運動

- 水平で曲がっていない道をまっすぐに等速度 v [m/s] で動く物体がある.
- 動き始めた地点から t [s] 後までにこの物体が動いた距離（変位）を x [m] とすると, $x = vt$ と表され, x は t の関数と考えることができる.

関数の例

例３）鉛直投げ上げ

- ある物体を初速度 v_0 [m/s] で真上（鉛直上向き）に投げる．
- t [s] 後の物体の位置（高さ）を y [m] とすると，$\boxed{y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t}$ と表され，y は t の関数となる（ただし，g は重力加速度定数）．

１次関数と２次関数

定義

独立変数 x の関数 $y = f(x)$ が

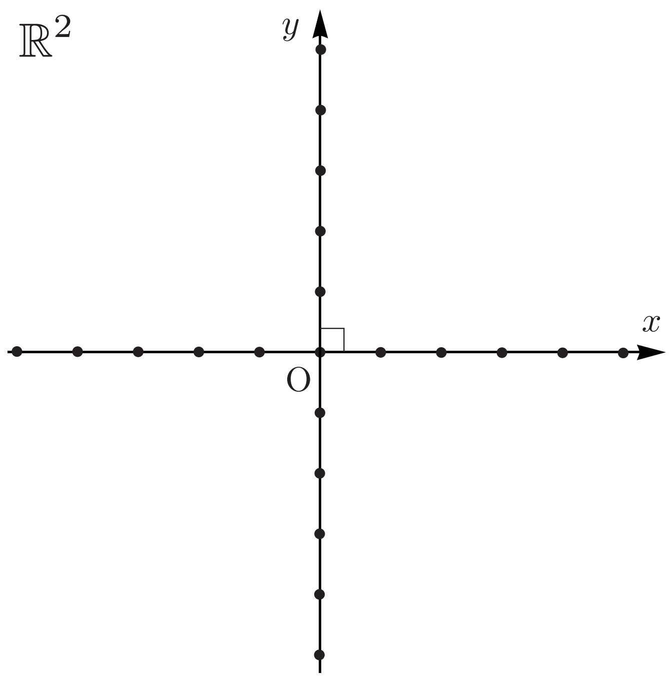
- $f(x) = ax + b$ と表されるとき, y を x の１次関数という.
- $f(x) = ax^2 + bx + c$ と表されるとき, y を x の２次関数という.

（a, b, c は定数）

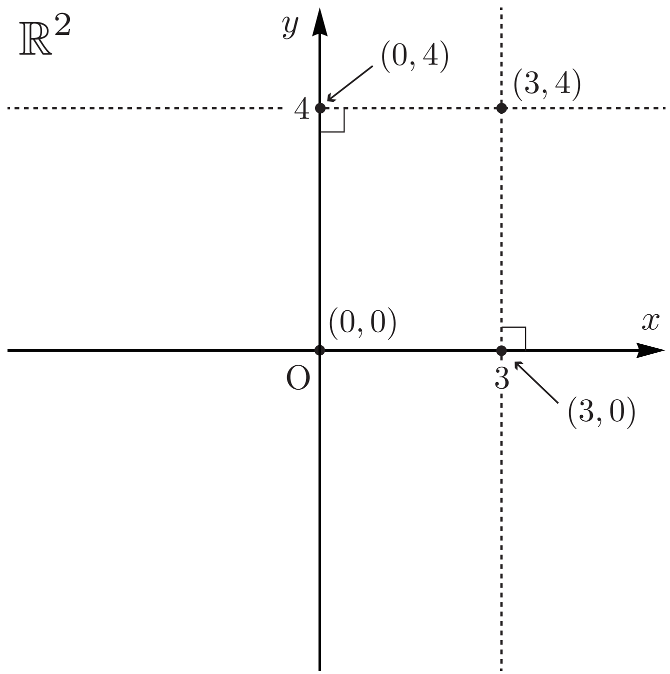
座標平面

- 関数 $y = f(x)$ があるとき, $x = \alpha$ に対して
  - 数 $y = f(\alpha)$ が定まる.
  - 数の組 $(\alpha, f(\alpha))$ が定まると考えてもよい. ← 点の座標を表す.
- 平面の点の 座標 とは，平面の点の位置を２つの数の組として表したもののこと.

平面の直交座標系

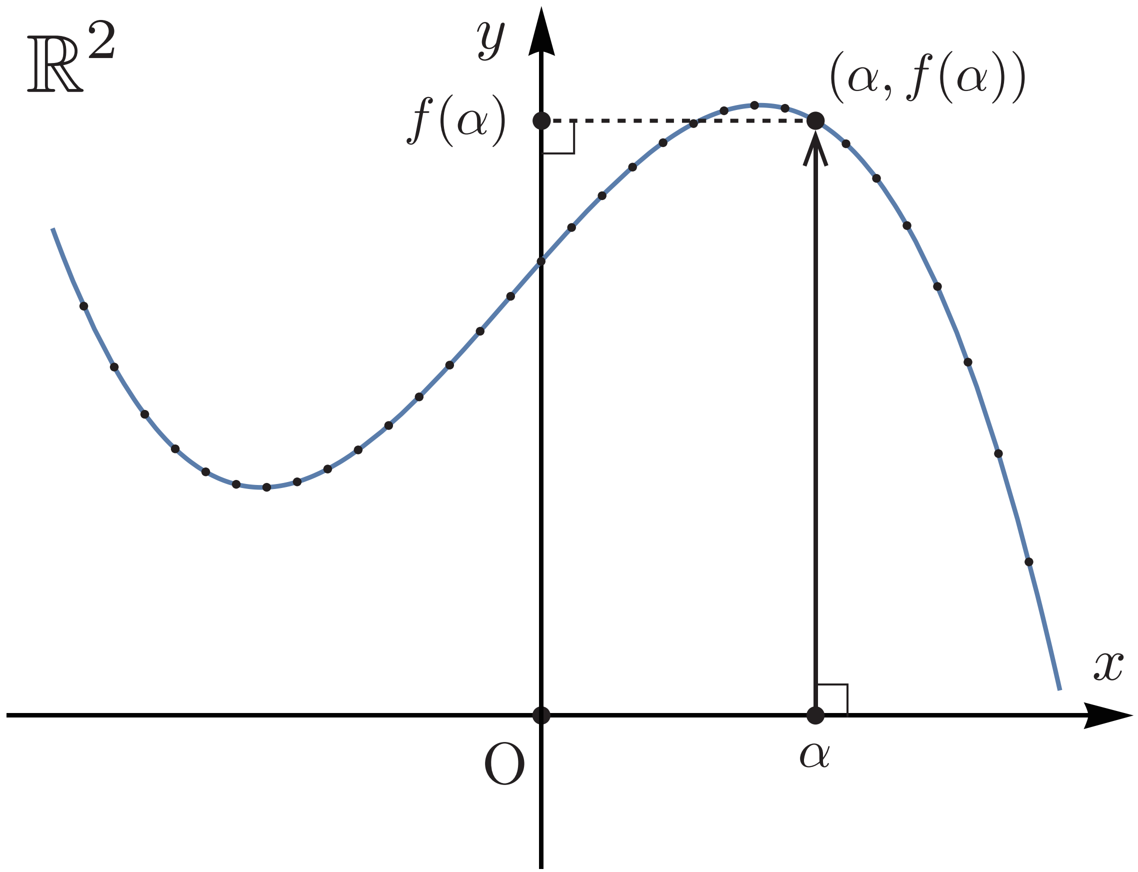


例）座標 $(3, 4)$ の点



関数のグラフとは

- 関数 $y = f(x)$ があるとき，$x = \alpha$ を与えると, 平面の点 $(\alpha, f(\alpha))$ が定まる. このような点の全体は, 平面内の曲線をなす.

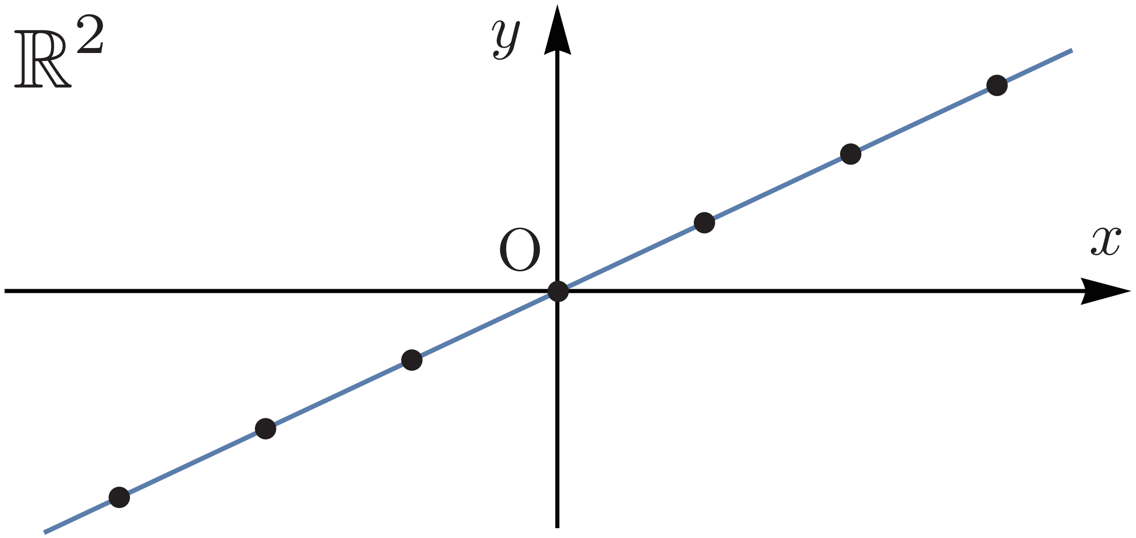


- この曲線を「関数 $y = f(x)$ の グラフ 」という.

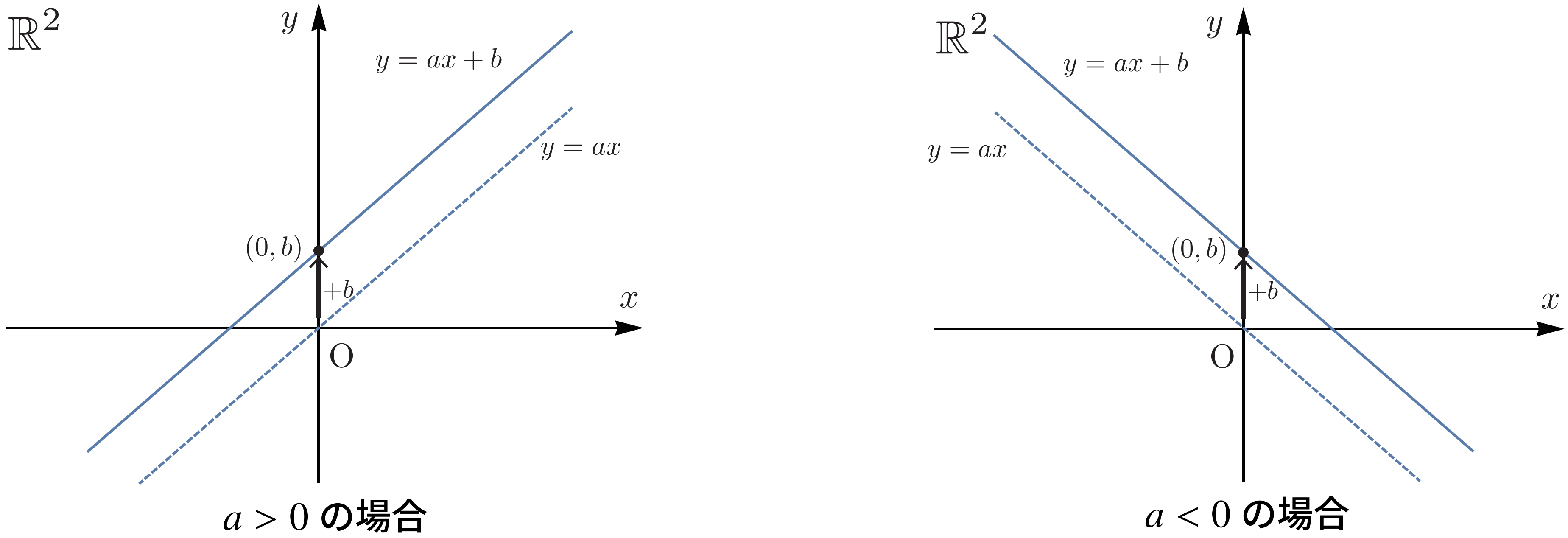
例）１次関数のグラフ

例）$y = \dfrac{1}{2}x$

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
					$\downarrow$				
(x, y)	$\cdots$	$\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$	$(-2, -1)$	$\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$	$(0, 0)$	$\left(1, \frac{1}{2}\right)$	$(2, 1)$	$\left(3, \frac{3}{2}\right)$	$\cdots$



1次関数のグラフは直線である



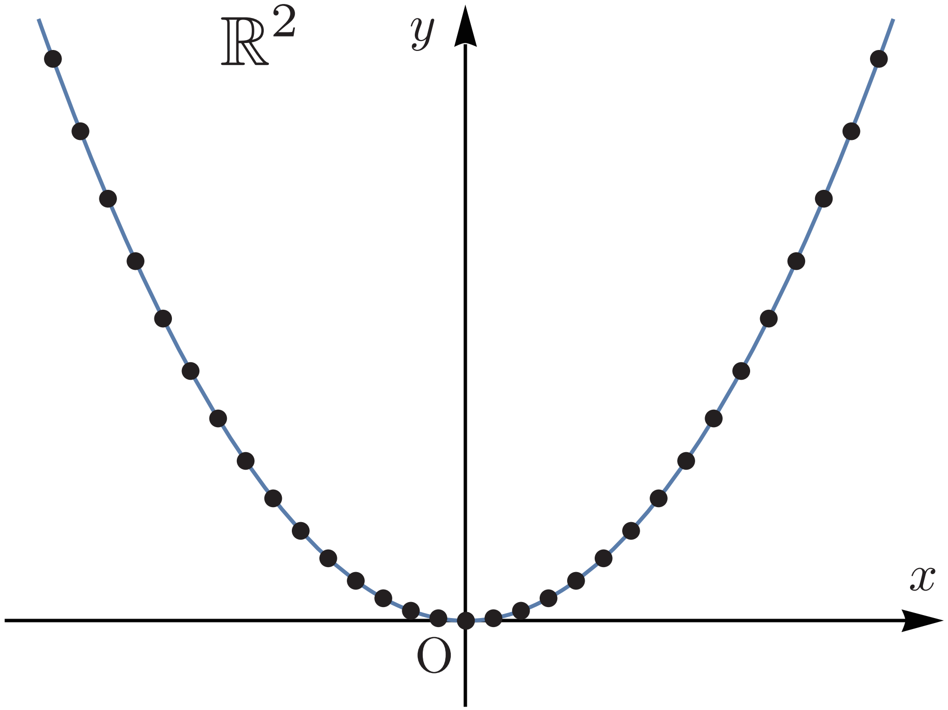
- 関数 $y = ax$ のグラフは原点を通る直線となる．
  - x の係数 a を直線の「傾き」という．
  - $|a|$ の値が大きいほど，直線の勾配は急である．
- $y = ax+b$ は，$y = ax$ と比べると，x に対応する y の値が $+b$ だけ異なる．

  $\longrightarrow$ $y = ax + b$ のグラフは，$y = ax$ のグラフを平行移動した直線．
  - 関数のグラフと y 軸との交点の値 b のことを y 切片という．

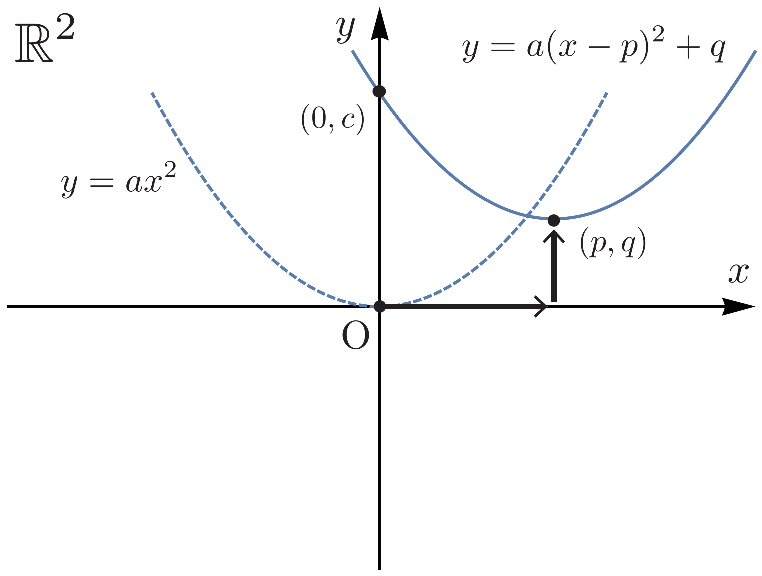
例）２次関数のグラフ

例）$y = \dfrac{1}{2}x^2$

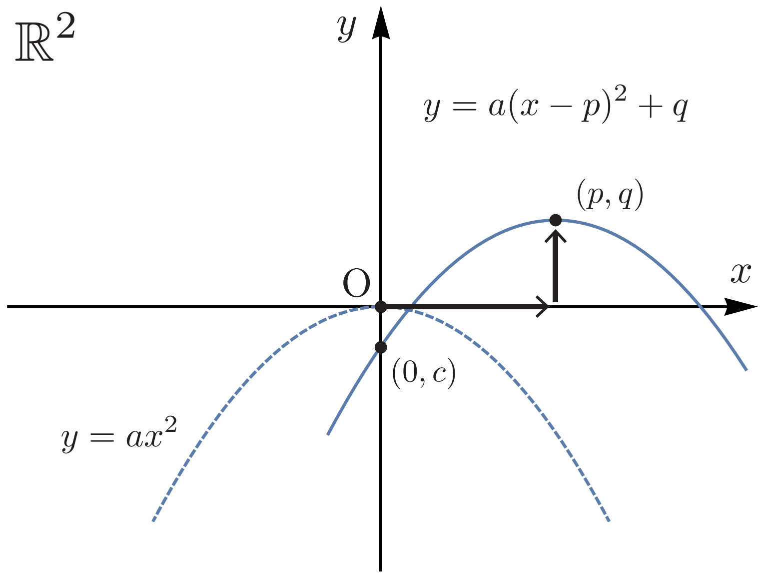
x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	$\cdots$



２次関数のグラフは放物線である



$a > 0$ の場合



$a < 0$ の場合

- 関数 $y = ax^2$ のグラフは原点を頂点とする放物線となる．
  - $a > 0$ のときは下に凸の放物線．
  - $a < 0$ のとき，上に凸の放物線．
- $y = ax^2 + bx + c \overset{\text{平方完成}}{=} a(x-p)^2 + q$ は，頂点が (p, q) の放物線となる．

$\longrightarrow$ $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフは, $y = ax^2$ のグラフを平行移動したもの.
  - y 切片は，$c\ (= ap^2 + q)$ である．

$ax^2 + bx + c$ を $a(x-p)^2 + q$ に変形する（平方完成）

$$
\begin{aligned}
y =& ax^2 + bx + c \\
=& a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
=& a\left(x^2 + {\color{red}2} \cdot \frac{b}{{\color{red}2}a}x\right) + c \\
=& a\left\{x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x {\color{red}+ \left(\frac{b}{2a}\right)^2} {\color{red}- \left(\frac{b}{2a}\right)^2}\right\} + c \\
=& a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c \\
=& a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c
\end{aligned}
$$

例）
$$
\begin{aligned}
y =& 2x^2 + 3x + 1 \\
=& 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x\right) + 1 \\
=& 2\left(x^2 + {\color{red}2} \cdot \frac{3}{4}x\right) + 1 \\
=& 2\left\{x^2 + 2 \cdot \frac{3}{4}x {\color{red}+ \left(\frac{3}{4}\right)^2} {\color{red}- \left(\frac{3}{4}\right)^2}\right\} + 1 \\
=& 2\left\{\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right\} + 1 \\
=& 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

$y = a(x-p)^2 + q$ のグラフ

- $y = a(x-p)^2 + q$ を $\boxed{y-q} = a\left(\boxed{x-p}\right)^2$ と書くと, これは

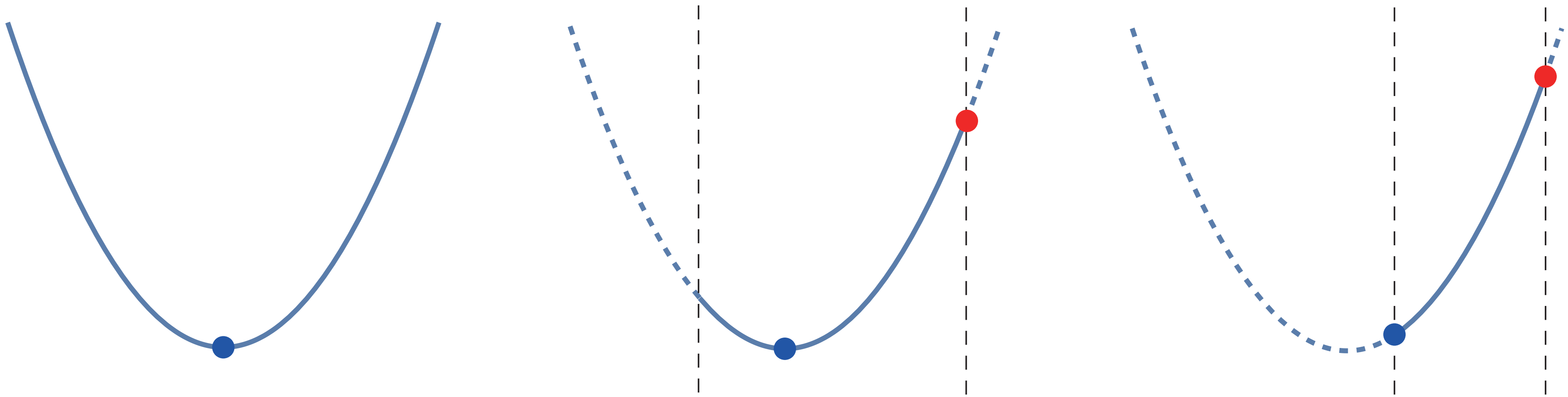
$$\boxed{Y = aX^2}$$

  という形をしている.

- $X = 0$ のとき $x = p$ であり, $Y = 0$ のとき $y = q$ である.

２次関数の最大値・最小値

- 「M が関数 $f(x)$ の最大値（または最小値）である」とは,
  - $M = f(a)$ となる $x = a$ が存在し, かつ
  - $f(x) \leqq M$（または $f(x) \geqq M$）が成り立つ.
- ２次関数 $f(x)$ を実数全体で考えているときは,
  - 下に凸ならば, 頂点の y 座標が $f(x)$ の最小値（最大値は存在しない）.
  - 上に凸ならば, 頂点の y 座標が $f(x)$ の最大値（最小値は存在しない）.
- x の範囲が制限されているときは？



まとめと復習（と予習）

- 関数とは何ですか？関数のグラフとは何ですか？
- ２次関数とはどのような関数ですか？
- ２次関数のグラフはどのような曲線ですか？
  - $y = ax^2$ のグラフを描けますか？
  - $ax^2 + bx + c$ を $a(x-p)^2 + q$ の形に変形できますか？
  - 放物線の頂点, y 切片, （上と下）どちらに凸か の情報から, ２次関数の式が導けますか？
- ２次関数の最大値，最小値を求めることができますか？

教科書 p.14〜17, 20

問題集 5, 7〜9（式の計算に不安なひとは 1〜3, 6 も）

予　習 問題集 3, 4