数学クォータ科目「基礎数学 I」第 14 回

ベクトルの内積

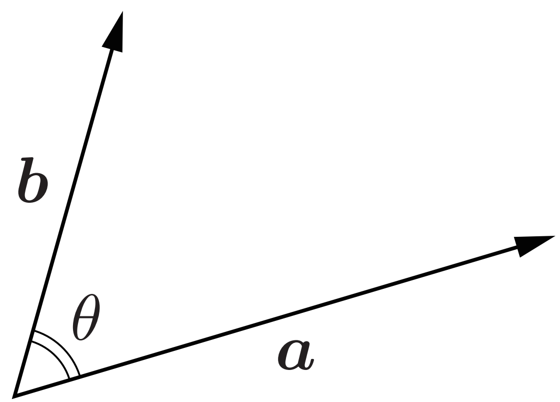
佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

今回の授業で理解してほしいこと

- ベクトルの内積の定義と性質

2つのベクトルのなす角

- $\mathbf{0}$ でない2つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ がある.
  - それらの始点が同一の点となるように平行移動する.
  - $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のとき, $\angle\mathrm{AOB}$ を「ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角」という.
  - 「なす角」というとき, その大きさ θ は, $0 \leq \theta \leq \pi$ とする.



ベクトルの内積の（幾何的）定義

定義

- ２つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を θ とする.

  このとき, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos\theta$$

  と定める.

- $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のうち, 少なくとも一方が $\boldsymbol{0}$ のときは, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ と定める.

ベクトルの内積の性質

(1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$

(2) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}\ (= |\boldsymbol{a}|^2) \geq 0$（$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 0$ となるのは $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ のときのみ）

(3) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}_2$

(4) $\boldsymbol{a} \cdot (k\boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$

※ (1) を対称性, (2) を正定値性, (3)(4) を線形性という.

- ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が
  - 直交する $\iff \theta = \dfrac{\pi}{2} \iff \boxed{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0}$
  - 平行である $\iff \theta = 0$ または $\pi \iff \boldsymbol{a} = k\boldsymbol{b} \iff |\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|$

ベクトルの内積の代数的な表現

- $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ とする.
  - このとき, $\boxed{\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}}$, $\boxed{\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}}$ と書ける.
    （基本ベクトル表示）
  - $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1, \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = 0$ に注意すると,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{b} \\
&= a_1\,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{b} + a_2\,\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{b} + a_3\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{b} \\
&= a_1\,\boldsymbol{i}\cdot(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})+a_2\,\boldsymbol{j}\cdot(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})+a_3\,\boldsymbol{k}\cdot(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}) \\
&= a_1b_1\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} + a_1b_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} + a_1b_3\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k} + a_2b_1\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} + a_2b_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} + a_2b_3\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} \\
&\quad + a_3b_1\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} + a_3b_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j} + a_3b_3\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} \\
&= \boxed{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}
\end{aligned}$$

ベクトルの内積の代数的な表現

事実

ふたつのベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対し,

- $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の内積は $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ である.
- $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすると,

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}\,\sqrt{(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2}}$$

まとめと復習（と予習）

- 内積とは何ですか？（幾何的，代数的表現）
- ベクトルの直交性，平行性と内積の関係は？

教科書 **71**

問題集 **64, 65**

予　習 関数とは何か（「基礎数学 II」の学習にむけて）