数学クォータ科目「基礎数学 I」第 13 回

ベクトルとその演算

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

今回の授業で理解してほしいこと

- ベクトルとは何か
  - 有向線分としてのベクトル
  - 成分表示されたベクトル
- ベクトルの線形演算
  - ベクトルの基本ベクトル表示

有向線分としてのベクトル（幾何ベクトル）

- 有向線分　向きを付与した線分のこと.

  「始点」と「終点」の情報

- 平行移動により２つの有向線分の始点と終点が重なるならば, それらを同じモノとみなす. このモノのことを ベクトル とよぶ.

- 始点が A で, 終点が B の有向線分が表すベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と表す.
- 一般には, アルファベット小文字の太文字 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \ldots$ でベクトルを表す.

- ベクトル $\boldsymbol{a}$ の有向線分としての長さのことをベクトルの大きさといい, $|\boldsymbol{a}|$ と表す.

ベクトルの成分表示（数ベクトル）

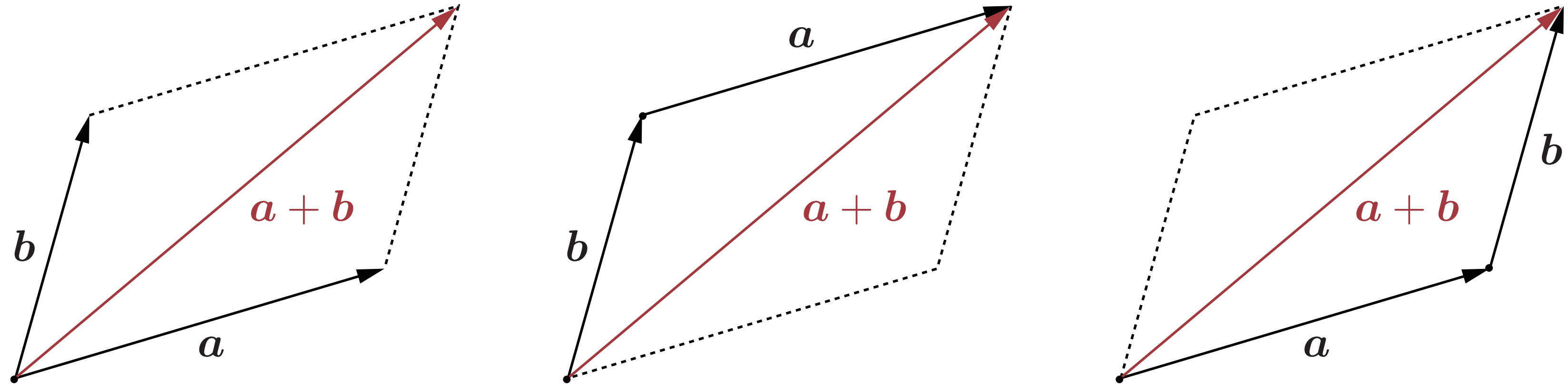
- ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対し, $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となるような点 A がただひとつ決まる.
- 点 A の座標でベクトルを表す方法を ベクトルの成分表示 という.
  - ベクトル $\boldsymbol{a}$ が平面ベクトルのときは, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ と表される.
  - ベクトル $\boldsymbol{a}$ が空間ベクトルのときは, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と表される.
- ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ の大きさは,

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$$

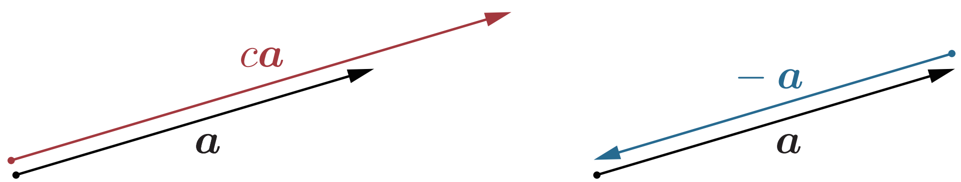
である.

ベクトルの線形演算

- 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対し, その 和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ が定義できる.

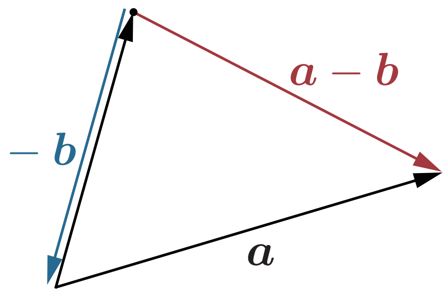


- ベクトル $\boldsymbol{a}$ と実数 c に対し, スカラー倍 $c\boldsymbol{a}$ が定義できる.



ベクトルの線形演算

- ２つのベクトルの差を $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$ と定める.



- ベクトルの線形演算の成分表示

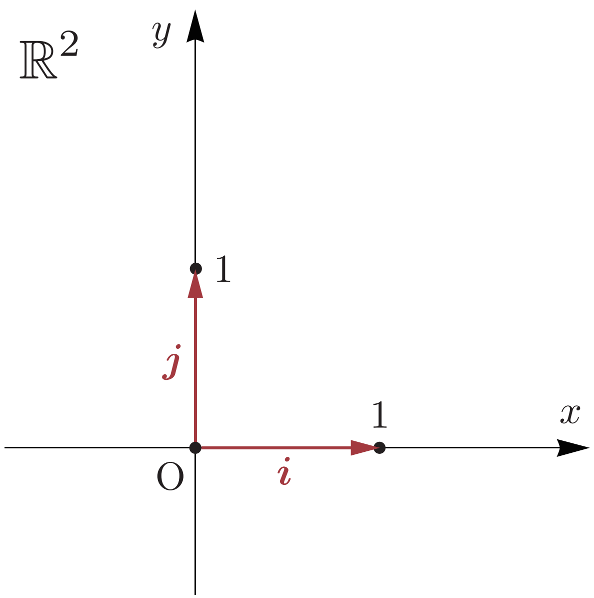
  $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ のとき,
  - $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
  - $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$
  - $c\boldsymbol{a} = (ca_1, ca_2, ca_3)$

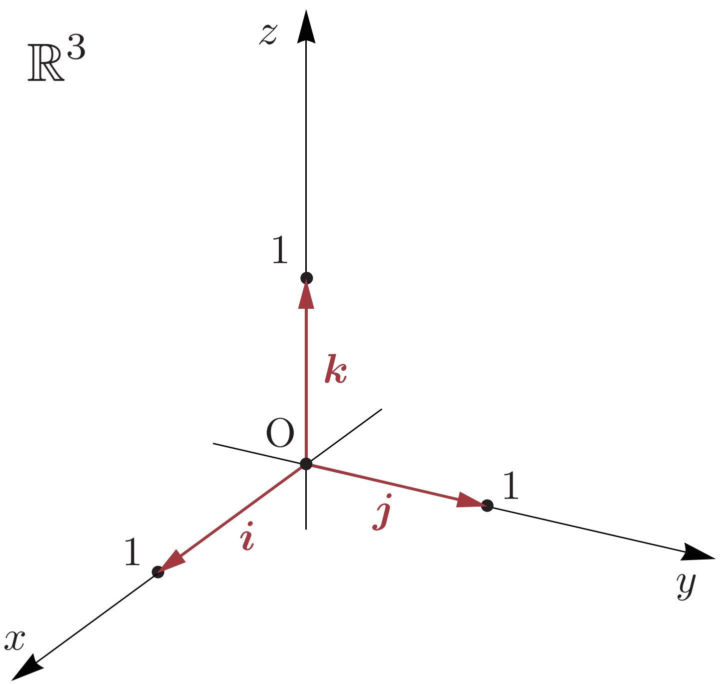
  である.

ベクトルの基本ベクトル表示

- **基本ベクトル**

  原点を始点とし, 各座標軸の「1」の点を終点とするベクトルのこと.
  - 平面においては 2 つある. $\boldsymbol{i} = (1, 0)$, $\boldsymbol{j} = (0, 1)$.
  - 空間においては 3 つある. $\boldsymbol{i} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$.





注 基本ベクトルは大きさ 1 のベクトル（単位ベクトル）である.

ベクトルの基本ベクトル表示

- 成分表示されたベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ は, ベクトルの線形演算により

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) &= (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) \\ &= a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) \\ &= a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

  と表すことができる.

- $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ をベクトルの 基本ベクトル表示 という.

まとめと復習（と予習）

- 有向線分とベクトルの違いは何ですか？
- ベクトルの成分表示，基本ベクトル表示とは何ですか？
- ベクトルの線形演算（和とスカラー倍）とはどのような演算ですか？

教科書 **p.68〜70**

問題集 **59〜63**