

数学クォータ科目「基礎数学 I」第 12 回

三角関数の加法定理

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

今回の授業で理解してほしいこと

- 三角関数の加法定理の使い方
- 加法定理から種々の公式（倍角, 半角, 積和, 和積）が得られること
- 三角関数の合成

正弦関数と余弦関数の加法定理

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \cdots \cdots (1)$

- $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \cdots \cdots (2)$

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$

- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \cdots \cdots (3)$

- $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cdots \cdots (4)$

- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$

正接関数の加法定理

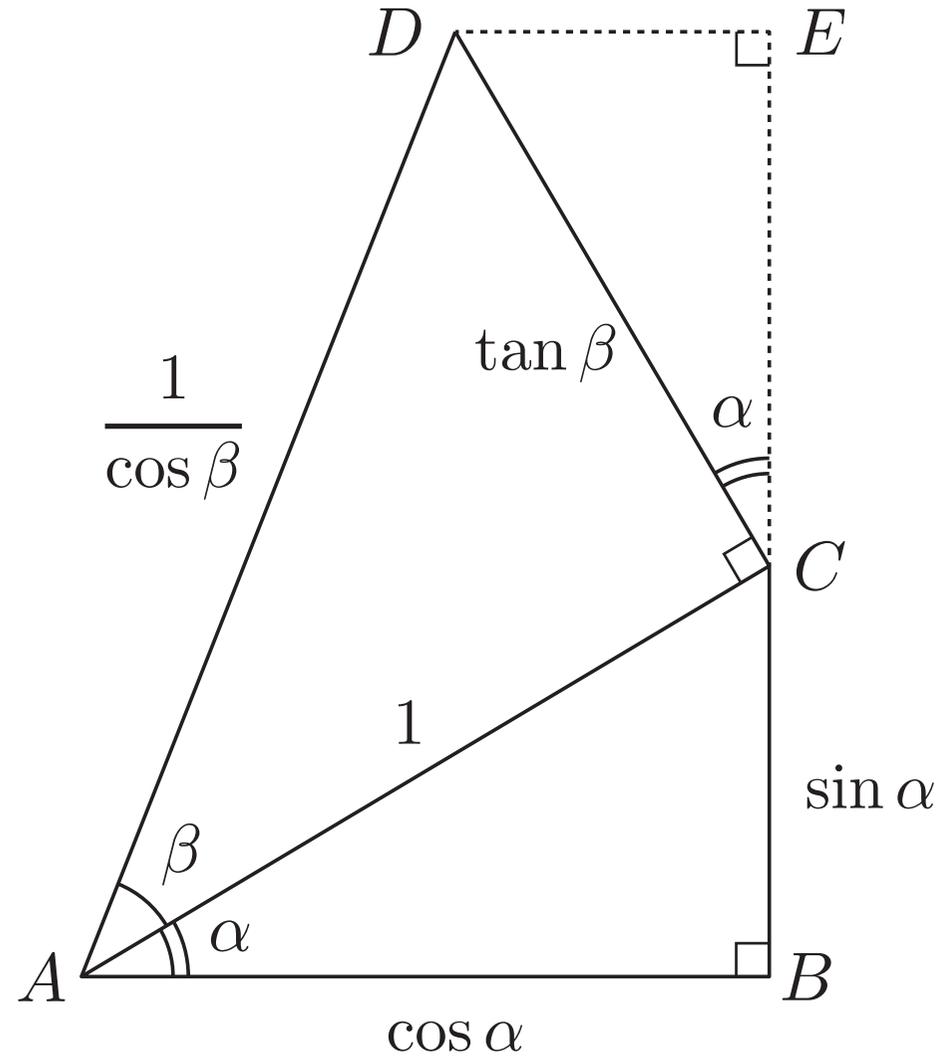
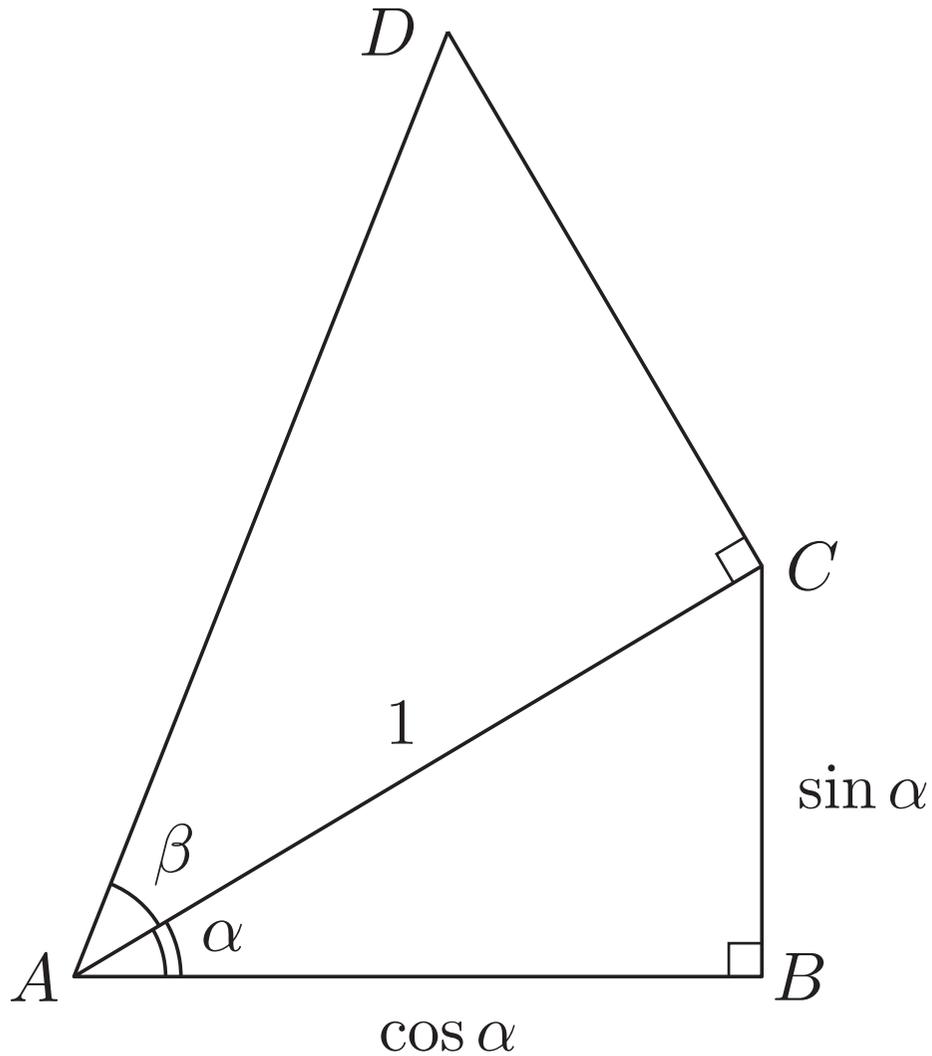
(1)(3) 式より

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \times \frac{1}{\cos \alpha \cos \beta}}{(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \times \frac{1}{\cos \alpha \cos \beta}} \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}\end{aligned}$$

(2)(4) 式より, $\tan(\alpha - \beta)$ も同様に計算すると,

$$\therefore \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

加法定理の証明 (特別な場合の初等的な証明)



倍角の公式

(1) 式において β に α を代入すると,

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\therefore \sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

(3) 式において β に α を代入すると,

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha$$

$$= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \begin{cases} (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\therefore \cos(2\alpha) = \begin{cases} 1 - 2 \sin^2 \alpha & \dots\dots (5) \\ 2 \cos^2 \alpha - 1 & \dots\dots (6) \end{cases}$$

半角の公式

(5) 式 $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2 \alpha$ より, $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$.

α を $\frac{\theta}{2}$ に置き換えると,

$$\therefore \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)$$

(6) 式 $\cos(2\alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1$ より, $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$.

α を $\frac{\theta}{2}$ に置き換えると,

$$\therefore \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$$

積和の公式

$\sin \alpha$ と $\cos \beta$ の積 は、正弦関数 \sin の和（差）として表すことができる。

(1)(2) 式より、

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \} = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\beta - \alpha) \}$$

$\sin \alpha$ と $\sin \beta$ の積

$\cos \alpha$ と $\cos \beta$ の積

は、余弦関数 \cos の和（差）として表すことができる。

(3)(4) 式より

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin \beta &= -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \} \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \} \end{aligned}$$

和積の公式

積和の公式の「逆」

- 正弦関数 \sin の和（差）は, \sin と \cos の積として表すことができる.
- 余弦関数 \cos の和は, \cos の積として表すことができる.
- 余弦関数 \cos の差は, \sin の積として表すことができる.

加法定理の応用：三角関数の合成

事実

$\sin x$ と $\cos x$ の線形結合 $a \sin x + b \cos x$ は
ひとつの三角関数 $A \sin(x + \varphi)$ の形で表すことができる。

$a \sin x + b \cos x = A \sin(x + \varphi)$ と表せたとすると、加法定理より

$$A \sin(x + \varphi) = A (\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi) = A \cos \varphi \sin x + A \sin \varphi \cos x$$

よって、定数 A, φ は連立方程式 $\begin{cases} a = A \cos \varphi \\ b = A \sin \varphi \end{cases}$ の解であることがわかる。

- $A = \sqrt{a^2 + b^2}$

- φ は $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ を満たす数

まとめと復習（と予習）

- 加法定理とはどのような等式のことですか？
- 加法定理からはどのような等式（公式）が得られますか？

教科書 p.64, 65

問題集 54～56