数学クォータ科目「応用解析」第 11 回 / 微分方程式（1）

# 微分方程式とその解

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

# 前回のキーワードと今回の授業で理解してほしいこと

## 前回のキーワード

- テイラー展開, マクローリン展開, ローラン展開
- $k$ 位の特異点（極）, 真性特異点
- 留数と留数定理

## 今回の授業で理解してほしいこと

- 微分方程式とは何か？
- 微分方程式の解とは何か？
- 微分方程式の一般解, 特殊解, 特異解とは何か？
- 特殊解を定める初期条件とは何か？
- 変数分離形微分方程式の一般解の求め方

# 数理モデルの例：人口の推移

時刻 $t$ のときの人口を $N(t)$ と表す.

マルサス (1798 年)　「$N(t)$ の増加率は $N(t)$ に比例する.」

- 時刻 $t$ から $t+h$ の間の増加量は $N(t+h)-N(t)$ だから, 増加率は
  $\dfrac{N(t+h)-N(t)}{(t+h)-t} = \dfrac{N(t+h)-N(t)}{h}$ である.
- 時刻 $t$ における増加率は $h \to 0$ としたときの極限なので,
  $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{N(t+h)-N(t)}{h} = N'(t)$（関数 $N(t)$ の導関数）である.
- よって, マルサスの主張は $N'(t) = k\,N(t)$ と表すことができる.
- この等式を満たす $N(t)$ は, $N(t) = N_0\,e^{kt}$ と表される.

注　これだと, 人口は際限なく増加し続ける.

# 数理モデルの例：人口の推移

時刻 $t$ のときの人口を $N(t)$ と表す.

フェルフルスト (1838 年) 「$N(t)$ には上限 $N_\infty$ があり, $N(t)$ の増加率 $N'(t)$ は

- $N(t)$ と
- 未利用の人口資源の上限に対する比 $\dfrac{N_\infty - N(t)}{N_\infty}$

の両方に比例する.」

- つまり, フェルフルストの主張は $N'(t) = k\,N(t) \cdot \dfrac{N_\infty - N(t)}{N_\infty}$ と表すことができる.
- この等式を満たす $N(t)$ は, $N(t) = \dfrac{N_\infty}{1 + \frac{N_\infty - N_0}{N_0} e^{-kt}}$ と表される.

# 数理モデル

- さまざまな現象（力学現象，天体現象を含む物理現象や社会現象, 生物現象など）を数学的に記述することをモデル化といい, その数式のことを数理モデルという.
- 数理モデルはたいてい 微分方程式 として表される.
- モデル化し, 数理モデル（微分方程式）を解くことによって, 現象を解明し, 未来のふるまいを予測することができる.
- 問題は, 与えられた微分方程式に対し,
  - 解は存在するのか？どのくらい（何個）存在するのか？
  - 解を具体的な関数で記述できるのか？（解法は存在するのか？）

# 微分方程式とは

**微分方程式**

独立変数 $x$, $x$ の関数 $y\ (= y(x))$ とその導関数 $y'$, $y''$, $y'''\ (= y^{(3)}), \ldots,\ y^{(n)}$ を含む方程式

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

のことを **微分方程式** という.

例） (1) $y' = y(1-y)$（ロジスティック方程式）

(2) $my'' = F(x)$（ニュートンの運動方程式）

(3) $y''' + 2y'' + y' - y = \cos x$

# 微分方程式とは

**微分方程式**

独立変数 $x$, $x$ の関数 $y\ (= y(x))$ とその導関数 $y'$, $y''$, $y'''\ (= y^{(3)}), \ldots,\ y^{(n)}$ を含む方程式

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

のことを **微分方程式** という.
また, 微分方程式に含まれる $y$ の導関数のうち, 最も高い階数が $n$ のとき, $n$ **階**微分方程式という.

注　1階微分方程式において, $y'$ を $\dfrac{dy}{dx}$ と表し, さらに, これを形式的に分数とみなして, $dx, dy$ を分離して記述する場合もある.

例） $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$

# 微分方程式の解とは

**微分方程式の解**

微分方程式 $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ に対し, この方程式を満たす $x$ と $y$ の方程式で, $y$ の導関数 $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ を含まないもの

$$F(x, y) = 0$$

のことを微分方程式の**解**という.

例） $y = (x-1)^2$ は微分方程式 $(y')^2 = 4y$ の解である.

例） $y = (x-c)^2$ も微分方程式 $(y')^2 = 4y$ の解である（$c$ は任意の定数）.

# 曲線群と微分方程式

- $x$ と $y$ の等式は, 座標平面内の曲線を定める.

例） (1) $x^2 + y^2 = 1$：原点を中心とする半径 1 の円

(2) $xy = 1$：双曲線

- 任意定数を含む $x$ と $y$ の等式は, 座標平面内の曲線群を定める.

例） (1) $x^2 + y^2 = c$：原点を中心とする半径 $\sqrt{c}$ の円

(2) $xy = c$：双曲線

- 曲線群の方程式から任意定数を含まない式を導くと...

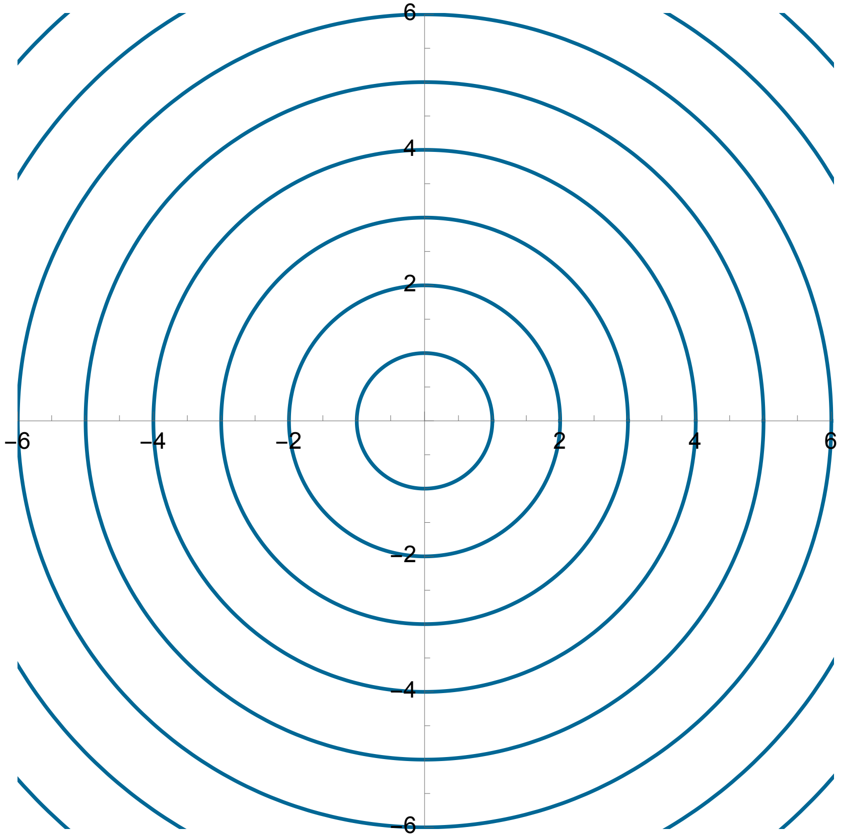
例） (1) $x + yy' = 0$

(2) $y + xy' = 0$

- この微分方程式は 曲線群に属するすべての曲線が共通にもっている性質 と理解することができる.

# 曲線群と微分方程式

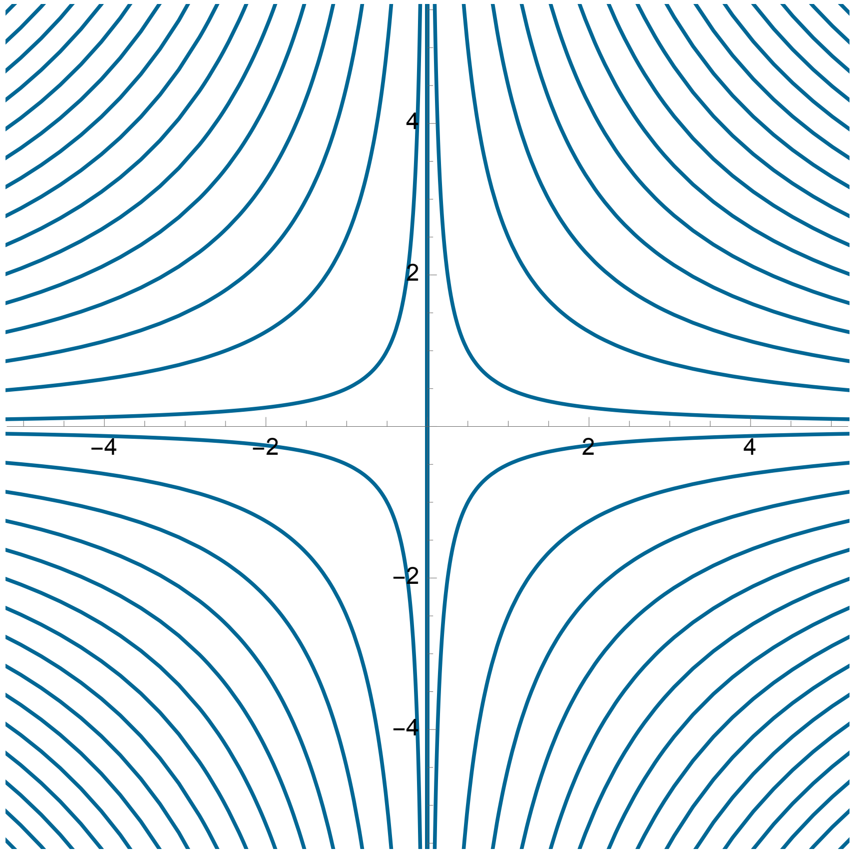
(1) $x^2 + y^2 = c^2$




$\downarrow$

$$\boxed{x + yy' = 0}$$

(1) $xy = c$




$\downarrow$

$$\boxed{y + xy' = 0}$$

# 微分方程式の解（一般解と特殊解, 特異解）

- 微分方程式を満たす $x$ と $y$ の関係式で, $y$ の導関数 $y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}$ を含まないもののことをその微分方程式の**解**という.

  ※微分方程式の解（方程式）を満たす点 $(x, y)$ の全体は曲線をなす. これを**解曲線**という.

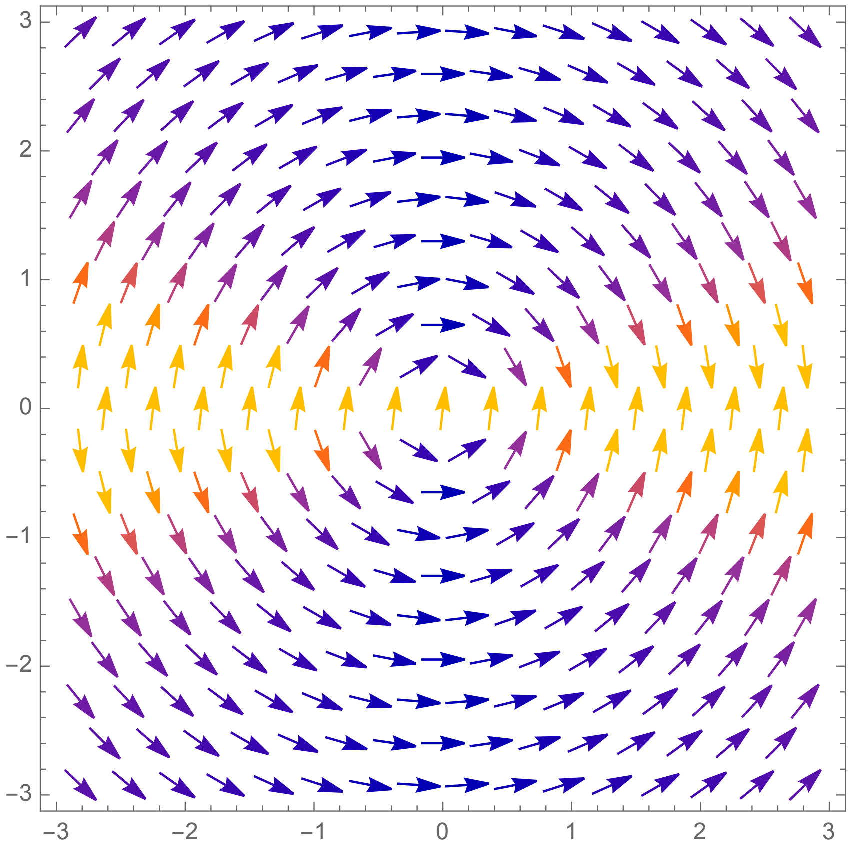
- 一般に, $n$ 階微分方程式の解は, $n$ 個の任意定数を含む方程式として表される. このような解のことを **一般解** という.
- 一般解の任意定数に適当な値を代入すれば, ひとつの解が得られる. これを **特殊解** という.
- 特殊解ではない解のことを **特異解** という.（教科書 p.7【例題２】を参照）

# １階微分方程式とベクトル場

- 関数 $y = y(x)$ のグラフ (曲線) をベクトル関数 $c(x) = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} = x\,\boldsymbol{i} + y(x)\,\boldsymbol{j}$ のホドグラフとみる.
- この微分 $c'(x) = \boldsymbol{i} + y'\,\boldsymbol{j}$ は, 点 $c(x)$ の接ベクトルである.
- １階微分方程式 $y' = f(x, y)$ があると,
  平面のベクトル場 $\boxed{\boldsymbol{A}(x, y) = \boldsymbol{i} + f(x, y)\,\boldsymbol{j}}$ が定まる.
  例） (1) $x + yy' = 0 \to \boldsymbol{A}(x, y) = \boldsymbol{i} - \dfrac{x}{y}\,\boldsymbol{j}$
  (2) $y + xy' = 0 \to \boldsymbol{A}(x, y) = \boldsymbol{i} - \dfrac{y}{x}\,\boldsymbol{j}$
- このベクトル場が速度ベクトルとなるような曲線（群）が微分方程式の解である.

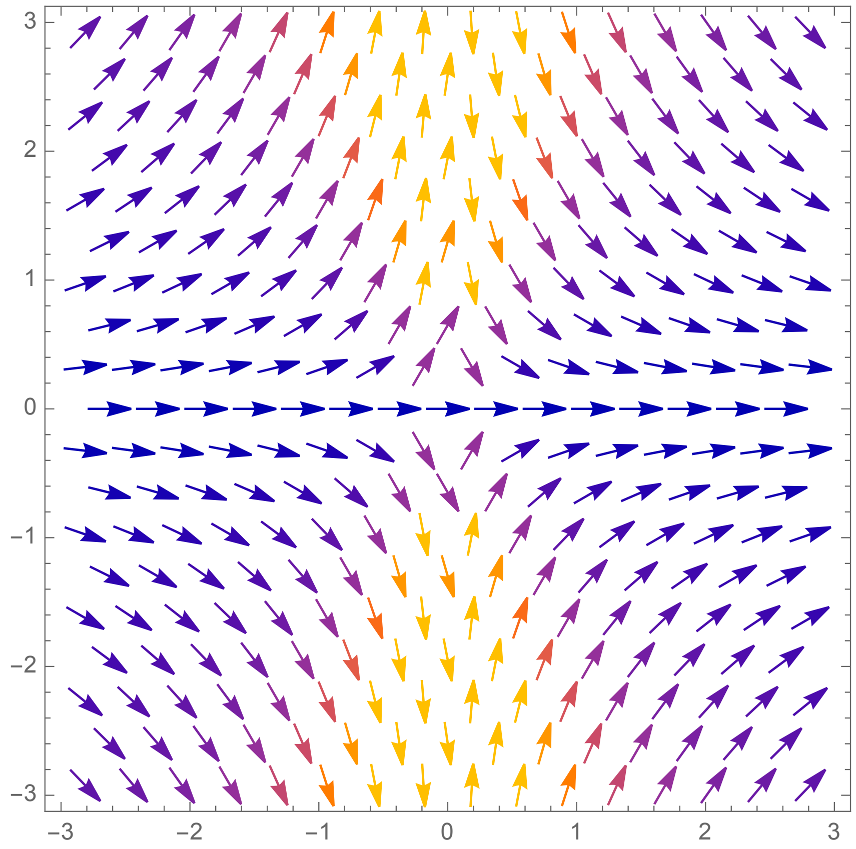
# １階微分方程式とベクトル場

(1) $x + yy' = 0$




$$\boldsymbol{A}(x, y) = \boldsymbol{i} - \frac{x}{y}\boldsymbol{j}$$

(1) $y + xy' = 0$




$$\boldsymbol{A}(x, y) = \boldsymbol{i} - \frac{y}{x}\boldsymbol{j}$$

# 微分方程式の解（初期条件から定まる特殊解）

- １階微分方程式の場合
  - 微分方程式 $f(x, y, y') = 0$ の一般解が $F(x, y, c) = 0$ であるとする.
  - $x = x_0$ のとき, $y = y_0$ である解が存在するならば,
    $F(x_0, y_0, c) = 0$ を満たす定数 $c = c_0$ が存在する.
  - このときの特殊解 $F(x, y, c_0) = 0$ を

    「初期条件 $x = x_0, y = y_0$ から定まる特殊解」

    という.
  - 微分方程式の一般解を平面内の曲線群とみると, 初期条件から定まる特殊解は, 点 $(x_0, y_0)$ を通る曲線と理解することができる.

# 1階微分方程式（1）変数分離形

**変数分離形**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \quad \text{つまり} \quad y' = (x\text{ の式}) \times (y\text{ の式})$$

と表される微分方程式を変数分離形という.

例）

- 放射性物質の崩壊モデル：$y' = -\lambda y$

  放射性物質は現在の物質量に比例する速さで崩壊する. ($\lambda$：崩壊定数)
- マルサスの人口モデル：$y' = ky$
- フェルフルストの人口モデル：$y' = \frac{k_1}{k_2}(k_2 - y)y$

# １階微分方程式（１）変数分離形の解法

1) $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f(x)}{g(y)}}$ の形に直す.

2)（形式的に）変数を分離する：$g(y)\,dy = f(x)\,dx$

3) 両辺を不定積分する：$\displaystyle\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx$

この結果得られる等式が一般解である.

# まとめと復習（と予習）

- 微分方程式 とは何ですか？その解とは何ですか？
- 微分方程式の一般解とは何ですか？特殊解, 特異解とは何ですか？
- 微分方程式の初期条件とは何ですか？
- 変数分離形とはどのような微分方程式ですか？その一般解はどのようにして求めることができますか？

教科書　**p.2〜11**

問題集　**239, 240, 241, 242, 243, 244**

予 習　変数分離形微分方程式の解法 「応用解析」