数学クォータ科目「応用解析」第 11 回 / 微分方程式（1）

微分方程式とその解

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

前回のキーワードと今回の授業で理解してほしいこと

前回のキーワード

- テイラー展開, マクローリン展開, ローラン展開
- k 位の特異点（極）, 真性特異点
- 留数と留数定理

今回の授業で理解してほしいこと

- 微分方程式とは何か？
- 微分方程式の解とは何か？
- 微分方程式の一般解, 特殊解, 特異解とは何か？
- 特殊解を定める初期条件とは何か？
- 変数分離形微分方程式の一般解の求め方

数理モデルの例：人口の推移

時刻 t のときの人口を $N(t)$ と表す.

マルサス (1798 年) 「$N(t)$ の増加率は $N(t)$ に比例する.」

- 時刻 t から $t+h$ の間の増加量は $N(t+h)-N(t)$ だから, 増加率は
  $$\frac{N(t+h)-N(t)}{(t+h)-t} = \frac{N(t+h)-N(t)}{h}$$ である.
- 時刻 t における増加率は $h \to 0$ としたときの極限なので,
  $$\lim_{h\to 0}\frac{N(t+h)-N(t)}{h} = N'(t)$$（関数 $N(t)$ の導関数）である.
- よって, マルサスの主張は $N'(t) = k\,N(t)$ と表すことができる.
- この等式を満たす $N(t)$ は, $N(t) = N_0\, e^{kt}$ と表される.

注 これだと, 人口は際限なく増加し続ける.

数理モデルの例：人口の推移

時刻 t のときの人口を $N(t)$ と表す.

フェルフルスト (1838 年) 「$N(t)$ には上限 N_∞ があり, $N(t)$ の増加率 $N'(t)$ は

- $N(t)$ と
- 未利用の人口資源の上限に対する比 $\dfrac{N_\infty - N(t)}{N_\infty}$

の両方に比例する.」

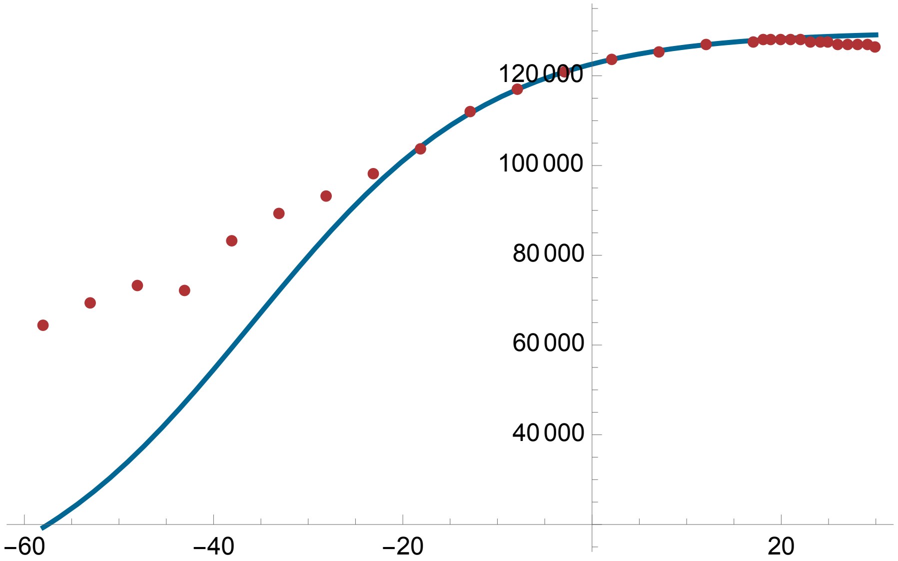
- つまり, フェルフルストの主張は $N'(t) = k\,N(t) \cdot \dfrac{N_\infty - N(t)}{N_\infty}$ と表すことができる.
- この等式を満たす $N(t)$ は, $N(t) = \dfrac{N_\infty}{1 + \frac{N_\infty - N_0}{N_0} e^{-kt}}$ と表される.

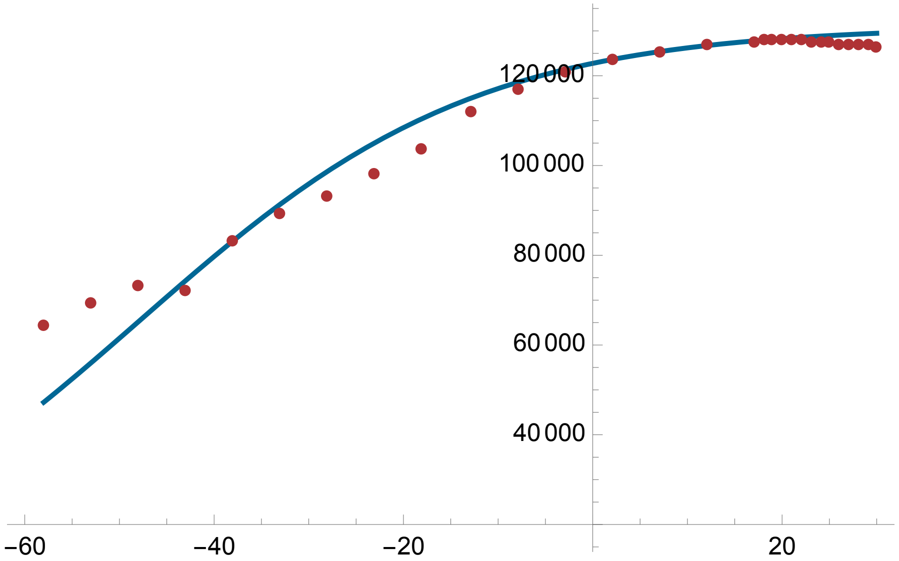
例）日本の人口の推移

3 年分の人口値から，定数 N_0, N_∞, k の値を求めた．

（左）昭和 25 年の人口を初期値 N_0 とし, 平成 2 年, 17 年の人口値から，N_∞, k を導出

（右）平成 2 年の人口を初期値 N_0 とし, 平成 7 年, 12 年の人口値から，N_∞, k を導出





数理モデル

- さまざまな現象（力学現象，天体現象を含む物理現象や社会現象, 生物現象など）を数学的に記述することをモデル化といい, その数式のことを数理モデルという.
- 数理モデルはたいてい 微分方程式 として表される.
- モデル化し, 数理モデル（微分方程式）を解くことによって, 現象を解明し, 未来のふるまいを予測することができる.
- 問題は, 与えられた微分方程式に対し,
    - 解は存在するのか？どのくらい（何個）存在するのか？
    - 解を具体的な関数で記述できるのか？（解法は存在するのか？）

微分方程式とは

微分方程式

独立変数 x, x の関数 y $(= y(x))$ とその導関数 y', y'', y''' $(= y^{(3)}), \ldots,$ $y^{(n)}$ を含む方程式

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

のことを **微分方程式** という.

例） (1) $y' = y(1-y)$（ロジスティック方程式）

(2) $my'' = F(x)$（ニュートンの運動方程式）

(3) $y''' + 2y'' + y' - y = \cos x$

微分方程式とは

微分方程式

独立変数 x, x の関数 y $(= y(x))$ とその導関数 y', y'', y''' $(= y^{(3)}), \ldots,$ $y^{(n)}$ を含む方程式

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

のことを **微分方程式** という.
また, 微分方程式に含まれる y の導関数のうち, 最も高い階数が n のとき, n **階**微分方程式という.

$\boxed{\text{注}}$ 1階微分方程式において, y' を $\dfrac{dy}{dx}$ と表し, さらに, これを形式的に分数とみなして, dx, dy を分離して記述する場合もある.

例） $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$

微分方程式の解とは

微分方程式の解

微分方程式 $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ に対し, この方程式を満たす x と y の方程式で, y の導関数 $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ を含まないもの

$$F(x, y) = 0$$

のことを微分方程式の**解**という.

例） $y = (x-1)^2$ は微分方程式 $(y')^2 = 4y$ の解である.

例） $y = (x-c)^2$ も微分方程式 $(y')^2 = 4y$ の解である（c は任意の定数）.

例） $y = 0$ も微分方程式 $(y')^2 = 4y$ の解である.

微分方程式の解とは（一般解と特殊解, 特異解）

- 微分方程式を満たす x と y の関係式で, y の導関数 y', y'', y''', $\ldots$, $y^{(n)}$ を含まないもののことをその微分方程式の**解**という.

  ※微分方程式の解（方程式）を満たす点 (x, y) の全体は曲線をなす. これを**解曲線**という.

- 一般に, n 階微分方程式の解は, **n 個の任意定数を含む方程式**として表される. このような解のことを **一般解** という.
- **一般解の任意定数に適当な値を代入**すれば, ひとつの解が得られる. これを **特殊解** という.
- 特殊解ではない解のことを **特異解** という.（教科書 p.7【例題２】を参照）

微分方程式とその解（一般解）の幾何学的な解釈

微分方程式 $\cdots$ 曲線群に含まれるすべての曲線がもつ共通の性質

$\updownarrow$

一般解 $\cdots$ 平面内の曲線群

微分方程式とその解（一般解）の幾何学的な解釈

- x と y の等式は, 座標平面内の曲線を定める.

  例） (1) $x^2 + y^2 = 1$：原点を中心とする半径 1 の円

  (2) $xy = 1$：双曲線

- 任意定数を含む x と y の等式は, 座標平面内の曲線群を定める.

  例） (1) $x^2 + y^2 = c$：原点を中心とする半径 $\sqrt{c}$ の円

  (2) $xy = c$：双曲線

- 曲線群の方程式から任意定数を含まない式を導くと...

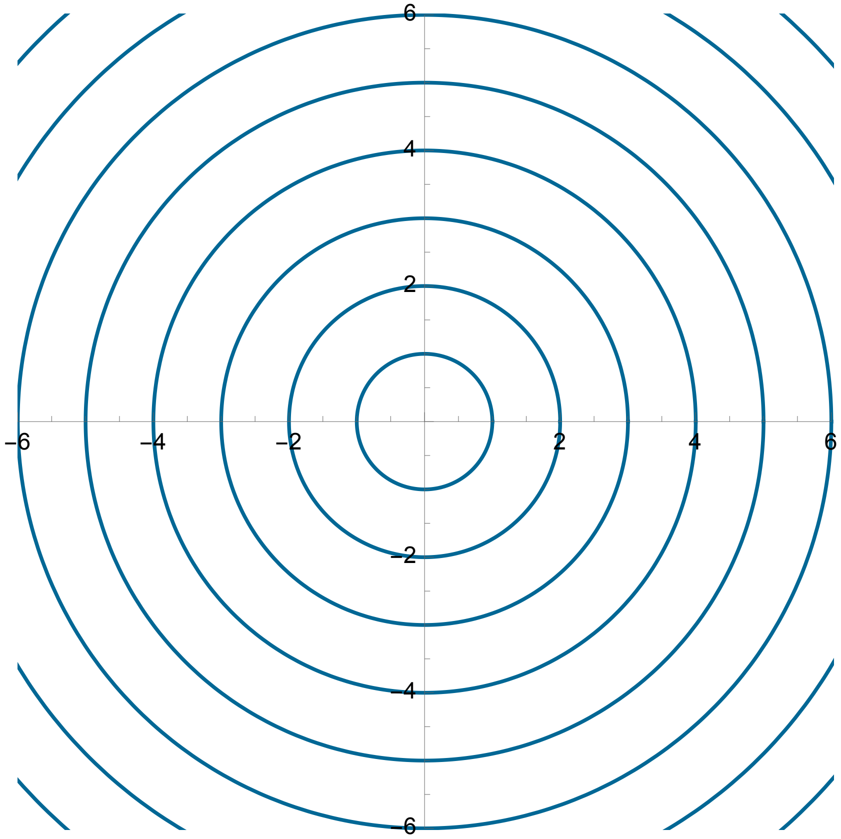
  例） (1) $x + yy' = 0$

  (2) $y + xy' = 0$

- この微分方程式は曲線群に属するすべての曲線が共通にもっている性質と理解することができる.

微分方程式とその解（一般解）の幾何学的な解釈

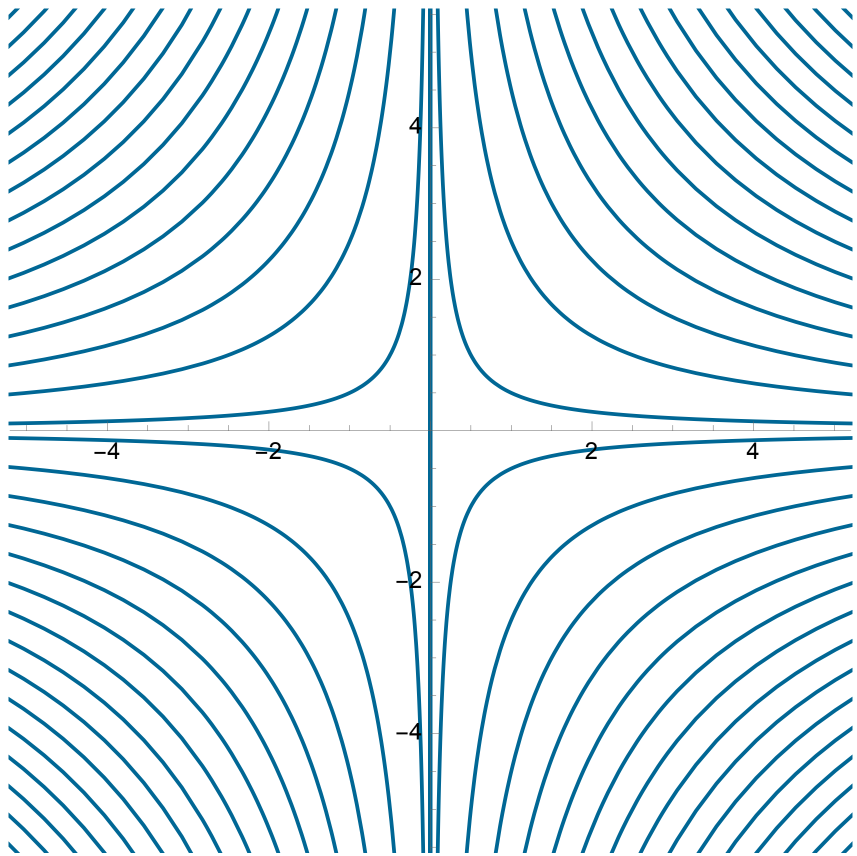
(1) $x^2 + y^2 = c^2$



$\downarrow$

$$x + yy' = 0$$

(1) $xy = c$



$\downarrow$

$$y + xy' = 0$$

微分方程式の解（初期条件から定まる特殊解）

- １階微分方程式の場合
  - 微分方程式 $f(x, y, y') = 0$ の一般解が $F(x, y, c) = 0$ であるとする.
  - $x = x_0$ のとき, $y = y_0$ である解が存在するならば,
    $F(x_0, y_0, c) = 0$ を満たす定数 $c = c_0$ が存在する.
  - このときの特殊解 $F(x, y, c_0) = 0$ を

    「初期条件 $x = x_0, y = y_0$ から定まる特殊解」

    という.
  - 微分方程式の一般解を平面内の曲線群とみると, 初期条件から定まる特殊解は, 点 (x_0, y_0) を通る曲線と理解することができる.

1階微分方程式（1）変数分離形

変数分離形

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \quad \text{つまり} \quad y' = (x\text{ の式}) \times (y\text{ の式})$$

と表される微分方程式を変数分離形という.

例）
- 放射性物質の崩壊モデル：$y' = -\lambda y$

  放射性物質は現在の物質量に比例する速さで崩壊する. (λ：崩壊定数)
- マルサスの人口モデル：$y' = ky$
- フェルフルストの人口モデル：$y' = \frac{k_1}{k_2}(k_2 - y)y$

１階微分方程式（１）変数分離形の解法

1) $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f(x)}{g(y)}}$ の形に直す.

2)（形式的に）変数を分離する：$g(y)\,dy = f(x)\,dx$

3) 両辺を不定積分する：$\displaystyle\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx$

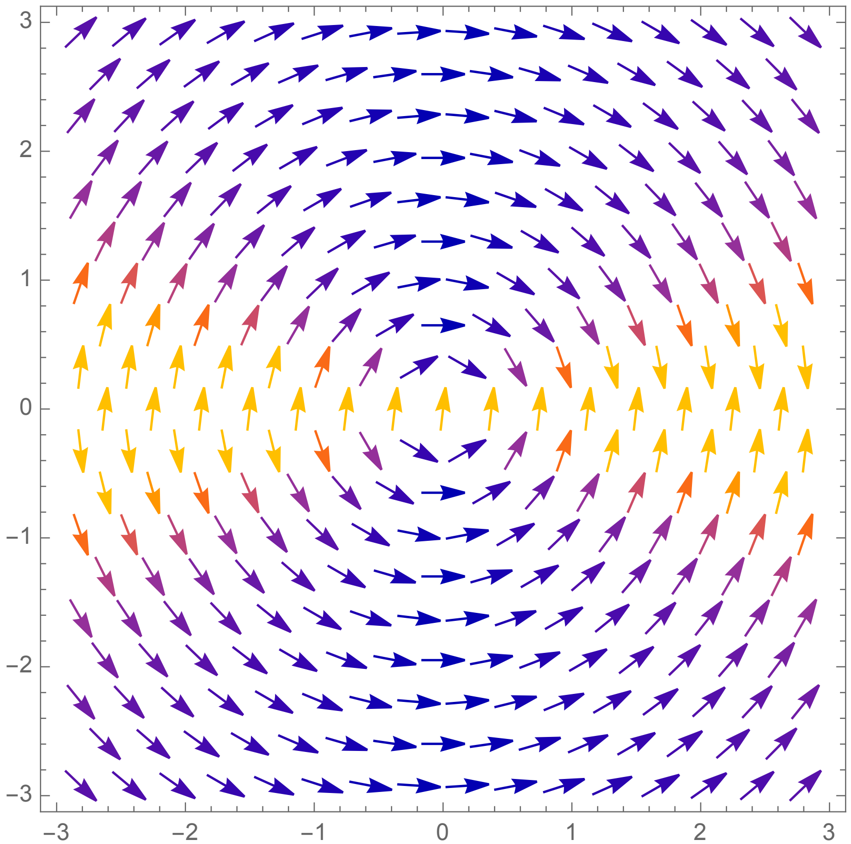
この結果得られる等式が一般解である.

（付録）１階微分方程式とベクトル場

- 関数 $y = y(x)$ のグラフ (曲線) をベクトル関数 $c(x) = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} = x\,\boldsymbol{i} + y(x)\,\boldsymbol{j}$ のホドグラフとみる.
- この微分 $c'(x) = \boldsymbol{i} + y'\,\boldsymbol{j}$ は, 点 $c(x)$ の接ベクトルである.
- １階微分方程式 $y' = f(x, y)$ があると,
  平面のベクトル場 $\boxed{\boldsymbol{A}(x, y) = \boldsymbol{i} + f(x, y)\,\boldsymbol{j}}$ が定まる.
  例） (1) $x + yy' = 0 \to \boldsymbol{A}(x, y) = \boldsymbol{i} - \dfrac{x}{y}\,\boldsymbol{j}$
  (2) $y + xy' = 0 \to \boldsymbol{A}(x, y) = \boldsymbol{i} - \dfrac{y}{x}\,\boldsymbol{j}$
- このベクトル場が速度ベクトルとなるような曲線（群）が微分方程式の解である.

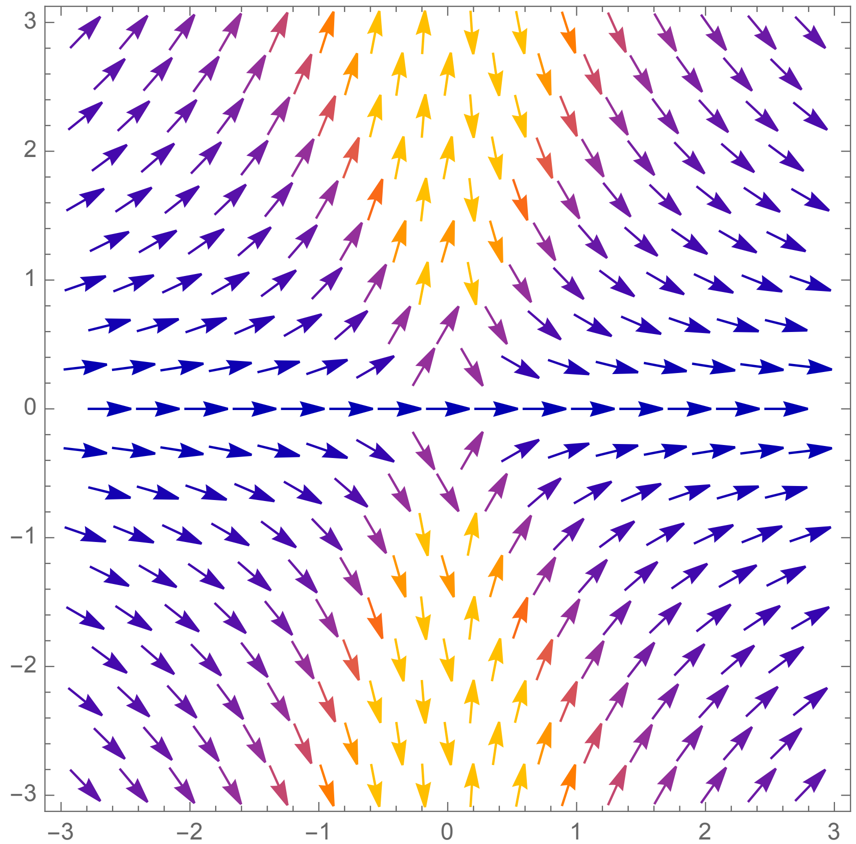
（付録） １階微分方程式とベクトル場

(1) $x + yy' = 0$



$$\boldsymbol{A}(x, y) = \boldsymbol{i} - \frac{x}{y}\,\boldsymbol{j}$$

(1) $y + xy' = 0$



$$\boldsymbol{A}(x, y) = \boldsymbol{i} - \frac{y}{x}\,\boldsymbol{j}$$

まとめと復習（と予習）

- 微分方程式 とは何ですか？その解とは何ですか？
- 微分方程式の一般解とは何ですか？特殊解, 特異解とは何ですか？
- 微分方程式の初期条件とは何ですか？
- 変数分離形とはどのような微分方程式ですか？その一般解はどのようにして求めることができますか？

教科書 p.2〜11

問題集 239, 240, 241, 242, 243, 244

予 習 変数分離形微分方程式の解法 「応用解析」