数学クォータ科目「応用解析」第９回 / 複素関数論（4）

コーシーの積分定理

佐藤 弘康　/ 日本工業大学 共通教育学群

前回のキーワードと今回の授業で理解してほしいこと

前回のキーワード

- 複素数平面内の曲線に沿っての複素積分

今回の授業で理解してほしいこと

- 閉路（単一閉曲線）に沿った複素積分の性質
- コーシーの定理, コーシーの積分表示, グルサーの定理

（復習）複素積分

定義

- 滑らかな曲線 $C : z(t) = x(t) + y(t)\,i,\ a \leq t \leq b$ と，
  C を含む領域で定義された関数 $f(z)$ に対し，

$$\boxed{\int_C f(z)\,dz := \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt}$$

  を「$f(z)$ の曲線 C に沿っての複素積分」という．
  また，曲線 C をその積分路という．

- 区分的に滑らかな曲線 $C_1 + C_2$ については，以下の式で定める．

$$\int_{C_1+C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$$

（復習）複素積分の性質

(a) 複素積分は 積分路 C のパラメーターのとり方に依らない.

(b) $f(z)$ が正則で, 原始関数 $F(z)$ をもつならば,

$$\int_C f(z)\,dz = F(z(b)) - F(z(a)).$$

(c) 滑らかな曲線 C を滑らかな曲線の和 $C_1 + C_2$ とみると

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$$

が成り立つ.

(d) 滑らかな曲線 C の逆向きの曲線 $-C$ については

$$\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz$$

が成り立つ.

閉路に沿った複素積分

問１）曲線 C を点 a を中心とする半径 r の円とする（ただし反時計回りの向きをもつとする）．このとき, 次の関数 $f(z)$ を C に沿って積分しなさい.

円の方程式とパラメーター表示について

- 「点 a を中心とする半径 r の円」とは, a との距離が r である点 z の全体.
- よって, 方程式 $\boxed{|z-a|=r}$ を満たす z の全体と考えられる.
- 「$z-a$ は絶対値が r」なので, $z-a=r\,e^{it}=r(\cos t+i\ \sin t)$ と書ける.
- 以上のことから,

$$C:\ \boxed{z(t)=a+r\,e^{it}}=a+r(\cos t+i\ \sin t),\quad 0\le t\le 2\pi$$

と表せることがわかる.

閉路に沿った複素積分

問１）次の関数 $f(z)$ を 円 $C: z(t) = a + re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ に沿って積分しなさい.

(1) $f(z) = z$

解） 1) 微分 $z'(t)$ を計算する：$z'(t) = ir\,e^{it}$

2) $f(z(t))$ を計算する：$f(z(t)) = a + r\,e^{it}$

3) $f(z(t))\,z'(t)$ を計算する：

$$f(z(t))\,z'(t) = (a + r\,e^{it})(ir\,e^{it}) = ir(ae^{it} + r\,e^{2it})$$

4) 積分 $\displaystyle\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt$ を計算する：

$$\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \{a(\cos t + i\ \sin t) + r(\cos 2t + i\ \sin 2t)\}\,dt$$

$$= ir\left[a(-\sin t + i\ \cos t) + r\left(-\frac{1}{2}\sin 2t + \frac{i}{2}\ \cos 2t\right)\right]_0^{2\pi} = \boxed{0}.$$

閉路に沿った複素積分

問１）次の関数 $f(z)$ を 円 $C: z(t) = a + re^{it}, 0 \le t \le 2\pi$ に沿って積分しなさい.

(2) $f(z) = \dfrac{1}{z-a}$

解） 1) 微分 $z'(t)$ を計算する：$z'(t) = ir\,e^{it}$

2) $f(z(t))$ を計算する：$f(z(t)) = \dfrac{1}{r\,e^{it}}$

3) $f(z(t))\,z'(t)$ を計算する：$f(z(t))\,z'(t) = \dfrac{1}{r\,e^{it}} \cdot ir\,e^{it} = i$

4) 積分 $\displaystyle\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt$ を計算する：

$$\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} i\,dt = i\int_0^{2\pi} dt = \boxed{2\pi i}.$$

閉路に沿った複素積分

問１）次の関数 $f(z)$ を 円 $C : z(t) = a + re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ に沿って積分しなさい.

(3) $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^n}\ (n > 1)$

解） 1) 微分 $z'(t)$ を計算する：$z'(t) = ir\,e^{it}$

2) $f(z(t))$ を計算する：$f(z(t)) = \dfrac{1}{r^n\,e^{int}}$

3) $f(z(t))\,z'(t)$ を計算する：$f(z(t))\,z'(t) = \dfrac{1}{r^n\,e^{int}} \cdot ir\,e^{it} = ir^{1-n}\,e^{i(1-n)t}$

4) 積分 $\displaystyle\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt$ を計算する：

$$\begin{aligned}\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt =& ir^{1-n}\int_0^{2\pi}\{\cos(1-n)t + i\,\sin(1-n)t\}\,dt \\ =& ir^{1-n}\left[-\frac{1}{1-n}\sin(1-n)t + \frac{i}{1-n}\cos(1-n)t\right]_0^{2\pi} = \boxed{0}.\end{aligned}$$

単一閉曲線

- 自分自身と<u>交点を持たず</u>, <u>閉じている</u>曲線のことを**単一閉曲線**という.
  - 共有点は認める.
  - 閉曲線：始点と終点が一致する曲線.
- 「反時計周り」の向き（正の向き）を持つとする.

単一閉曲線は平面を内側と外側に分ける. 内側で右手で曲線を持って進む方向が正の向きである.

閉路に沿った複素積分

問１ (2)(3) の結果より

公式

C を中心が a で半径が r の円とする. このとき,

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_{|z-a|=r} \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i & (n=1) \\ 0 & (n>1) \end{cases}$$

- 積分値は半径 r に依らないことに注意.

コーシーの定理

定理１（コーシーの定理）

関数 $f(z)$ は単一閉曲線 C とその内部で正則であるとする．このとき，

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

- 多項式関数など複素数平面全体で正則な関数は，任意の単一閉曲線 C に対し，$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ である．

  ※ 問１）(1) を参照

積分路の変形

定理２

領域 D で正則な関数 $f(z)$ がある. さらに

- D 内に 2 つの単一閉曲線 C, C_1 がある.
- C_1 は C の内部にある.
- C_1 と C で囲まれた領域は D に含まれる.

このとき,

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz$$

積分路の変形

問２）$f(z) = \dfrac{1}{z-2}$ に対し, 次の単一閉曲線に沿っての複素積分を求めなさい.

(1) 中心が 0 で半径が 1 の円 C_1

(2) 中心が 0 で半径が 3 の円 C_2

（解）$f(z)$ は $z = 2$ で正則ではない（$z = 2$ を除いた領域で正則である）.

(1) $f(z)$ は C_1 とその内部で正則である. よって, コーシーの定理より,

$$\int_{C_1} \frac{dz}{z-2} = 0$$

(2) $z = 2$ は C_2 の内部にある. C_3 を中心が 2 で半径が 1 の円周とすると, C_2 と C_3 で囲まれた領域で $f(z)$ は正則なので,

$$\int_{C_2} \frac{dz}{z-2} = \int_{C_3} \frac{dz}{z-2} = \int_{|z-2|=1} \frac{dz}{z-2} = 2\pi i.$$

積分路の変形

問３）$f(z) = \dfrac{z}{z-2}$ に対し, 次の単一閉曲線に沿っての複素積分を求めなさい.

(1) 中心が 0 で半径が 1 の円 C_1

(2) 中心が 0 で半径が 3 の円 C_2

（解）$f(z)$ は $z=2$ で正則ではない（$z=2$ を除いた領域で正則である）.

(1) $f(z)$ は C_1 とその内部で正則である. よって, コーシーの定理より,

$$\int_{C_1} \frac{z}{z-2} dz = 0$$

積分路の変形

問３）$f(z) = \dfrac{z}{z-2}$ に対し, 次の単一閉曲線に沿っての複素積分を求めなさい.

(1) 中心が 0 で半径が 1 の円 C_1

(2) 中心が 0 で半径が 3 の円 C_2

（解）$f(z)$ は $z=2$ で正則ではない（$z=2$ を除いた領域で正則である）.

(2) $z=2$ は C_2 の内部にある. C_3 を中心が 2 で半径が 1 の円周とすると, C_2 と C_3 で囲まれた領域で $f(z)$ は正則なので,

$$\int_{C_2} \frac{z}{z-2}dz = \int_{C_3} \frac{z}{z-2}dz = \int_{|z-2|=1} \frac{z}{z-2}dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2+e^{it}}{(2+e^{it})-2}(2+e^{it})'\,dt$$

$$= \,= i\int_0^{2\pi}(2+e^{it})\,dt = 2\cdot 2\pi i$$

コーシーの積分表示

定理３（コーシーの積分表示）

領域 D で正則な関数 $f(z)$ がある. さらに

- D 内に単一閉曲線 C がある.
- C の内部は領域 D に含まれている.
- 点 a は C の内部にある.

このとき,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz \quad \text{つまり} \quad \boxed{\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i\, f(a)}$$

コーシーの積分表示

定理３の証明

- 仮定から, 積分路を a を中心とする適当な半径 R の円 Γ に変えてよい.

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

- $\Gamma : z(t) = a + Re^{it}, 0 \leq t < 2\pi$ である. $z'(t) = i\,Re^{it}$ なので,

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(a+Re^{it})}{Re^{it}} iRe^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} f(a+Re^{it})\,dt$$

- 左辺 は R を含まないので, 右辺 も R に無関係である.

（十分小さい値であればどんな R に対しても右辺は一定値である）

- $f(z)$ の連続性より, $R \to 0$ とすると

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = i\int_0^{2\pi} f(a+Re^{it})\,dt \xrightarrow{R\to 0} i\int_0^{2\pi} f(a)\,dt = 2\pi i\, f(a).$$

コーシーの積分表示

- 「コーシーの積分表示」を利用した $\displaystyle\int_{|z-2|=1}\frac{z}{z-2}dz=4\pi i$ の別解

（解）$f(z)=z$ とおくと, $f(z)$ は複素数平面全体 $\mathbb{C}$ で正則である.

- ○ 円 $|z-2|=1$ は（当然）$\mathbb{C}$ 内にある.
- ○ 円 $|z-2|=1$ の内部は（当然）$\mathbb{C}$ に含まれる.
- ○ 点 2 は 円 $|z-2|=1$ の内部にある.

よって, コーシーの積分表示より,

$$\int_{|z-2|=1}\frac{z}{z-2}dz=\int_{|z-2|=1}\frac{f(z)}{z-2}dz=2\pi i f(2)=2\pi i\cdot 2=4\pi i.$$

コーシーの積分表示

定理４（コーシーの積分表示２：グルサーの定理）

領域 D で正則な関数 $f(z)$ がある. さらに

- D 内に単一閉曲線 C がある.
- C の内部は領域 D に含まれている.
- 点 a は C の内部にある.

このとき,

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \quad \text{つまり} \quad \boxed{\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(a)}$$

コーシーの積分表示

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz, \quad f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^n}dz$$

からわかること.

- 正則関数 $f(z)$ の点 a における値 $f(a)$ は, a のまわりの単一閉曲線上の値によって決定される.
- 正則関数は何回でも微分可能である.

まとめと復習（と予習）

- コーシーの定理, コーシーの積分表示, グルサーの定理とは？
- 上の３つの定理は, それぞれどのような積分計算において利用されるのか？

教科書 p.159〜167

問題集 230, 231, 232, 233

予 習 <u>実１変数関数のマクローリン展開</u> 「数学」