

数学クォータ科目「応用解析」第9回 / 複素関数論 (4)

コーシーの積分定理

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

前回のキーワードと今回の授業で理解してほしいこと

前回のキーワード

- 複素数平面内の曲線に沿っての複素積分

今回の授業で理解してほしいこと

- 閉路（**単一閉曲線**）に沿った複素積分の性質
- 次の3つの定理を活用した複素積分の計算方法
 - **コーシーの定理**
 - **コーシーの積分表示**
 - **グルサーの定理**

(復習) 複素積分

定義

- 滑らかな曲線 $C : z(t) = x(t) + y(t)i, a \leq t \leq b$ と,
 C を含む領域で定義された関数 $f(z)$ に対し,

$$\int_C f(z) dz := \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$$

を「 $f(z)$ の曲線 C に沿っての複素積分」という。

また, 曲線 C をその積分路という。

- 区分的に滑らかな曲線 $C_1 + C_2$ については, 以下の式で定める。

$$\int_{C_1+C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz$$

(復習) 複素積分の性質

(a) 複素積分は 積分路 C のパラメーターのとり方に依らない.

(b) $f(z)$ が正則で, 原始関数 $F(z)$ をもつならば,

$$\int_C f(z) dz = F(z(b)) - F(z(a)).$$

(c) 滑らかな曲線 C を滑らかな曲線の和 $C_1 + C_2$ とみると

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz$$

が成り立つ.

(d) 滑らかな曲線 C の逆向きの曲線 $-C$ については

$$\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz$$

が成り立つ.

閉路に沿った複素積分

問1) 曲線 C を点 a を中心とする半径 r の円とする (ただし反時計回りの向きをもつとする) . このとき, 次の関数 $f(z)$ を C に沿って積分しなさい.

円の方程式とパラメーター表示について

- 「点 a を中心とする半径 r の円」とは, a との距離が r である点 z の全体.
- よって, 方程式 $|z - a| = r$ を満たす z の全体と考えられる.
- 「 $z - a$ は絶対値が r 」なので, $z - a = r e^{it} = r(\cos t + i \sin t)$ と書ける.
- 以上のことから,

$$C : z(t) = a + r e^{it} = a + r(\cos t + i \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

と表せることがわかる.

閉路に沿った複素積分

問1) 次の関数 $f(z)$ を円 $C : z(t) = a + re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ に沿って積分しなさい。

(1) $f(z) = z$

(2) $f(z) = \frac{1}{z - a}$

(3) $f(z) = \frac{1}{(z - a)^n} \quad (n > 1)$

閉路に沿った複素積分

問 1) 次の関数 $f(z)$ を円 $C : z(t) = a + r e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ に沿って積分しなさい。

(1) $f(z) = z$

解) 1) 微分 $z'(t)$ を計算する : $z'(t) = i r e^{it}$

2) $f(z(t))$ を計算する : $f(z(t)) = a + r e^{it}$

3) $f(z(t)) z'(t)$ を計算する :

$$f(z(t)) z'(t) = (a + r e^{it})(i r e^{it}) = i r (a e^{it} + r e^{2it})$$

4) 積分 $\int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$ を計算する :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt &= \int_0^{2\pi} \{a(\cos t + i \sin t) + r(\cos 2t + i \sin 2t)\} dt \\ &= i r \left[a(-\sin t + i \cos t) + r \left(-\frac{1}{2} \sin 2t + \frac{i}{2} \cos 2t \right) \right]_0^{2\pi} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

閉路に沿った複素積分

問 1) 次の関数 $f(z)$ を円 $C : z(t) = a + re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ に沿って積分しなさい。

$$(2) f(z) = \frac{1}{z - a}$$

解) 1) 微分 $z'(t)$ を計算する： $z'(t) = ir e^{it}$

2) $f(z(t))$ を計算する： $f(z(t)) = \frac{1}{r e^{it}}$

3) $f(z(t)) z'(t)$ を計算する： $f(z(t)) z'(t) = \frac{1}{r e^{it}} \cdot ir e^{it} = i$

4) 積分 $\int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$ を計算する：

$$\int_a^b f(z(t)) z'(t) dt = \int_0^{2\pi} i dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

閉路に沿った複素積分

問 1) 次の関数 $f(z)$ を円 $C : z(t) = a + re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ に沿って積分しなさい。

$$(3) f(z) = \frac{1}{(z-a)^n} \quad (n > 1)$$

解) 1) 微分 $z'(t)$ を計算する: $z'(t) = ir e^{it}$

$$2) f(z(t)) \text{ を計算する: } f(z(t)) = \frac{1}{r^n e^{int}}$$

$$3) f(z(t)) z'(t) \text{ を計算する: } f(z(t)) z'(t) = \frac{1}{r^n e^{int}} \cdot ir e^{it} = ir^{1-n} e^{i(1-n)t}$$

4) 積分 $\int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$ を計算する:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt &= ir^{1-n} \int_0^{2\pi} \{\cos(1-n)t + i \sin(1-n)t\} dt \\ &= ir^{1-n} \left[-\frac{1}{1-n} \sin(1-n)t + \frac{i}{1-n} \cos(1-n)t \right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

単一閉曲線

- 自分自身と交点を持たず, 閉じている曲線のことを**単一閉曲線**という.
 - 共有点は認める.
 - 閉曲線：始点と終点が一致する曲線.
- 「反時計周り」の向き（**正の向き**）を持つとする.

単一閉曲線は平面を内側と外側に分ける. 内側で右手で曲線を持って進む方向が**正の向き**である.

閉路に沿った複素積分

問1 (2)(3)の結果より

公式

C を中心が a で半径が r の円とする. このとき,

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_{|z-a|=r} \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i & (n=1) \\ 0 & (n>1) \end{cases}$$

- 積分値は半径 r に依らないことに注意.

コーシーの定理

定理 1 (コーシーの定理)

関数 $f(z)$ は単一閉曲線 C とその内部で正則であるとする。このとき、

$$\int_C f(z) dz = 0$$

- 多項式関数など複素数平面全体で正則な関数は、任意の単一閉曲線 C に対し、 $\int_C f(z) dz = 0$ である。

※ 問 1) (1) を参照

積分路の変形

定理 2

領域 D で正則な関数 $f(z)$ がある. さらに

- D 内に 2 つの単一閉曲線 C, C_1 がある.
- C_1 は C の内部にある.
- C_1 と C で囲まれた領域は D に含まれる.

このとき,

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz$$

積分路の変形

問2) $f(z) = \frac{1}{z-2}$ に対し, 次の単一閉曲線に沿っての複素積分を求めなさい.

(1) 中心が 0 で半径が 1 の円 C_1

(2) 中心が 0 で半径が 3 の円 C_2

(解) $f(z)$ は $z = 2$ で正則ではない ($z = 2$ を除いた領域で正則である).

(1) $f(z)$ は C_1 とその内部で正則である. よって, コーシーの定理より,

$$\int_{C_1} \frac{dz}{z-2} = 0$$

(2) $z = 2$ は C_2 の内部にある. C_3 を中心が 2 で半径が 1 の円周とすると, C_2 と C_3 で囲まれた領域で $f(z)$ は正則なので,

$$\int_{C_2} \frac{dz}{z-2} = \int_{C_3} \frac{dz}{z-2} = \int_{|z-2|=1} \frac{dz}{z-2} = 2\pi i.$$

積分路の変形

問3) $f(z) = \frac{z}{z-2}$ に対し, 次の単一閉曲線に沿っての複素積分を求めなさい.

(1) 中心が 0 で半径が 1 の円 C_1

(2) 中心が 0 で半径が 3 の円 C_2

(解) $f(z)$ は $z = 2$ で正則ではない ($z = 2$ を除いた領域で正則である) .

(1) $f(z)$ は C_1 とその内部で正則である. よって, コーシーの定理より,

$$\int_{C_1} \frac{z}{z-2} dz = 0$$

積分路の変形

問3) $f(z) = \frac{z}{z-2}$ に対し, 次の単一閉曲線に沿っての複素積分を求めなさい.

(1) 中心が 0 で半径が 1 の円 C_1

(2) 中心が 0 で半径が 3 の円 C_2

(解) $f(z)$ は $z = 2$ で正則ではない ($z = 2$ を除いた領域で正則である).

(2) $z = 2$ は C_2 の内部にある. C_3 を中心が 2 で半径が 1 の円周とすると, C_2 と C_3 で囲まれた領域で $f(z)$ は正則なので,

$$\begin{aligned}\int_{C_2} \frac{z}{z-2} dz &= \int_{C_3} \frac{z}{z-2} dz = \int_{|z-2|=1} \frac{z}{z-2} dz \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{2 + e^{it}}{(2 + e^{it}) - 2} (2 + e^{it})' dt \\ &= i \int_0^{2\pi} (2 + e^{it}) dt = 2 \cdot 2\pi i = 4\pi i\end{aligned}$$

コーシーの積分表示

定理3 (コーシーの積分表示)

領域 D で正則な関数 $f(z)$ がある. さらに

- D 内に単一閉曲線 C がある.
- C の内部は領域 D に含まれている.
- 点 a は C の内部にある.

このとき,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz \quad \text{つまり} \quad \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$$

コーシーの積分表示

定理3の証明

- 仮定から、積分路を a を中心とする適当な半径 R の円 Γ に変えてよい。

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

- $\Gamma : z(t) = a + Re^{it}, 0 \leq t < 2\pi$ である。 $z'(t) = iRe^{it}$ なので、

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(a + Re^{it})}{Re^{it}} iRe^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(a + Re^{it}) dt$$

- **左辺** は R を含まないので、**右辺** も R に無関係である。

(十分小さい値であればどんな R に対しても**右辺**は一定値である)

- $f(z)$ の連続性より、 $R \rightarrow 0$ とすると

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = i \int_0^{2\pi} f(a + Re^{it}) dt \xrightarrow{R \rightarrow 0} i \int_0^{2\pi} f(a) dt = 2\pi i f(a).$$

コーシーの積分表示

- 「コーシーの積分表示」を利用した $\int_{|z-2|=1} \frac{z}{z-2} dz = 4\pi i$ の別解

(解) $f(z) = z$ とおくと, $f(z)$ は複素数平面全体 \mathbb{C} で正則である.

- 円 $|z-2|=1$ は (当然) \mathbb{C} 内にある.
- 円 $|z-2|=1$ の内部は (当然) \mathbb{C} に含まれる.
- 点 2 は円 $|z-2|=1$ の内部にある.

よって, コーシーの積分表示より,

$$\int_{|z-2|=1} \frac{z}{z-2} dz = \int_{|z-2|=1} \frac{f(z)}{z-2} dz = 2\pi i f(2) = 2\pi i \cdot 2 = 4\pi i.$$

コーシーの積分表示

定理 4 (コーシーの積分表示 2 : **グルサーの定理**)

領域 D で正則な関数 $f(z)$ がある. さらに

- D 内に単一閉曲線 C がある.
- C の内部は領域 D に含まれている.
- 点 a は C の内部にある.

このとき,

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad \text{つまり} \quad \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a)$$

コーシーの積分表示

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz, \quad f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^n} dz$$

からわかること.

- 正則関数 $f(z)$ の点 a における値 $f(a)$ は, a のまわりの単一閉曲線上の値によって決定される.
- 正則関数は何回でも微分可能である.

まとめと復習（と予習）

- コーシーの定理, コーシーの積分表示, グルサーの定理とは？
- 上の3つの定理は, それぞれどのような積分計算において利用されるのか？

教科書 p.159~167

問題集 230, 231, 232, 233

予習 実1変数関数のマクローリン展開 「数学」