

数学クォータ科目「応用解析」第8回 / 複素関数論 (3)

複素積分

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

前回のキーワードと今回の授業で理解してほしいこと

前回のキーワード

- 複素関数, 正則関数, コーシー・リーマンの方程式
- 有理関数, 指数関数, 三角関数, 対数関数

今回の授業で理解してほしいこと

- 複素数平面内の**曲線** (実1変数複素数値関数)
- 曲線に沿っての**複素積分**

【復習】ベクトル関数のホドグラフとしての空間曲線

- 1変数ベクトル関数

$$A(t) = A_x(t) \mathbf{i} + A_y(t) \mathbf{j} + A_z(t) \mathbf{k}$$

は空間曲線を定めた（点 $(A_x(t), A_y(t), A_z(t))$ の全体）。

- 同様に，1変数ベクトル関数

$$A(t) = A_x(t) \mathbf{i} + A_y(t) \mathbf{j}$$

は平面曲線を定める（点 $(A_x(t), A_y(t))$ の全体）。

- 平面を複素数平面と考えると，点 $(A_x(t), A_y(t))$ に対応する複素数は， $A_x(t) + i A_y(t)$ である。

複素数平面内の曲線

- 実変数 t の複素数値関数 $z(t)$ を考える。
つまり、実数 t の値に対して、複素数 $z(t) = x(t) + iy(t)$ が定まるとする。
これは複素数平面内の**曲線**である。
- t が $a \leq t \leq b$ の範囲を動くとき、 $z(a)$ をこの曲線の**始点**、 $z(b)$ を**終点**という（2つを合わせて**端点**という）。
- 複素数平面内の曲線 $z(t) = x(t) + iy(t)$ ($a \leq t \leq b$) に対し、
 $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ を $z(t)$ の微分という。
 - 平面におけるベクトル $(x'(t), y'(t))$ は点 $(x(t), y(t))$ で曲線 $z(t)$ に接するベクトルである。
 - $x'(t), y'(t)$ が連続な関数のとき、「曲線 C は滑らかである」という。
 - $\int_a^b |z'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$ は曲線の**長さ**である。

曲線の演算

- 曲線 $z(t) = x(t) + iy(t)$ ($a \leq t \leq b$) を記号 C で表すとき, C の終点から始点に向かう曲線 $w(t) = z(a + b - t)$ ($a \leq t \leq b$) を $-C$ と表す.
- 2つの曲線 $C_1 : z(t)$ と $C_2 : w(t)$ について, C_1 の終点と C_2 の始点が等しいとき, この2つを繋げてできる曲線を $C_1 + C_2$ と表す.
- C_1 と C_2 が滑らかな曲線るとき, $C_1 + C_2$ は「区分的に滑らかである」という.

複素積分

定義

- 滑らかな曲線 $C : z(t) = x(t) + iy(t)$ ($a \leq t \leq b$) と,
 C を含む領域で定義された関数 $f(z)$ に対し,

$$\int_C f(z) dz := \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$$

を「 $f(z)$ の曲線 C に沿っての複素積分」という。

また, 曲線 C をその積分路という。

- 区分的に滑らかな曲線 $C_1 + C_2$ については, 以下の式で定める。

$$\int_{C_1+C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz$$

複素積分の計算例

問 1) 関数 $f(z) = z^2$ を次の曲線 C に沿って積分しなさい。

(1) $C : z(t) = t + ti \ (0 \leq t \leq 1)$

解) 1) 微分 $z'(t)$ を計算する： $z'(t) = 1 + i$

2) $f(z(t))$ を計算する：

$$f(z(t)) = (z(t))^2 = (t + ti)^2 = t^2(1 + i)^2 = t^2(1 + 2i + i^2) = 2it^2$$

3) 積 $f(z(t))z'(t)$ を計算する： $f(z(t))z'(t) = 2i(1 + i)t^2 = 2(i - 1)t^2$

4) 積分 $\int_a^b f(z(t))z'(t) dt$ を計算する：

$$\int_a^b f(z(t))z'(t) dt = \int_0^1 2(i - 1)t^2 dt = 2(i - 1) \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2(i - 1)}{3}.$$

複素積分の計算例

問 1) 関数 $f(z) = z^2$ を次の曲線 C に沿って積分しなさい。

(2) $C : z(t) = t^2 + t^2 i \ (0 \leq t \leq 1)$

解) 1) 微分 $z'(t)$ を計算する： $z'(t) = 2t + 2t i = 2t(1 + i)$

2) $f(z(t))$ を計算する：

$$f(z(t)) = (z(t))^2 = (t^2 + t^2 i)^2 = t^4(1 + i)^2 = t^4(1 + 2i + i^2) = 2i t^4$$

3) $f(z(t)) z'(t)$ を計算する： $f(z(t)) z'(t) = 4i(1 + i)t^5 = 4(i - 1)t^5$

4) 積分 $\int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$ を計算する：

$$\int_a^b f(z(t)) z'(t) dt = \int_0^1 4(i - 1)t^5 dt = 4(i - 1) \left[\frac{t^6}{6} \right]_0^1 = \frac{2(i - 1)}{3}.$$

複素積分の計算例

問 1) 関数 $f(z) = z^2$ を次の曲線 C に沿って積分しなさい。

(3) $C : z(t) = t + t^2 i \ (0 \leq t \leq 1)$

解) 1) 微分 $z'(t)$ を計算する： $z'(t) = 1 + 2t i$

2) $f(z(t))$ を計算する： $f(z(t)) = (z(t))^2 = (t + t^2 i)^2 = t^2 + 2t^3 i - t^4$

3) $f(z(t)) z'(t)$ を計算する：

$$f(z(t)) z'(t) = (t^2 - t^4 + 2t^3 i)(1 + 2t i) = t^2 - 5t^4 + (4t^3 - 2t^5) i$$

4) 積分 $\int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$ を計算する：

$$\begin{aligned} \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt &= \int_0^1 \{t^2 - 5t^4 + (4t^3 - 2t^5) i\} dt = \left[\frac{t^3}{3} - t^5 + \left(t^4 - \frac{t^6}{3} \right) i \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - 1 + \left(1 - \frac{1}{3} \right) i = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} i = \frac{2(i-1)}{3}. \end{aligned}$$

複素積分の性質

(a) 複素積分は **積分路 C のパラメーターのとり方に依らない**.

- 問 (1), (2) の積分路はそれぞれ, $z(t) = (1 + i)t$, $z(t) = (1 + i)t^2$ であり, これは始点が原点 0 で終点が $1 + i$ の線分である.
- 曲線の表記 (パラメーター) は異なるが, 曲線としては同じである.

(b) $f(z)$ が正則で, **原始関数 $F(z)$** をもてば,

$$\int_C f(z) dz = F(z(b)) - F(z(a)).$$

- (3) の積分路は始点と終点が (1)(2) のそれと一致する.
- $F(z) = \frac{z^3}{3}$ とおくと, $F'(z) = f(z)$ である. よって,

$$\int_C f(z) dz = F(1 + i) - F(0) = \frac{(1 + i)^3}{3} = \frac{1 + 3i + 3i^2 + i^3}{3} = \frac{2(i - 1)}{3}.$$

複素積分の性質

(c) 滑らかな曲線 C を滑らかな曲線の和 $C_1 + C_2$ とみると

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz$$

が成り立つ.

(d) 滑らかな曲線 C の逆向きの曲線 $-C$ については

$$\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz$$

が成り立つ.

まとめと復習（と予習）

- 複素積分の定義（計算方法）は？
- 原始関数をもつ正則関数の複素積分はどのようにして計算できるか？

教科書 p.153～158

問題集 228, 229, 230*

予習 複素積分の計算 「応用解析」