数学クォータ科目「応用解析」第 6 回 / 複素関数論（1）

複素数と複素数平面

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

前回のキーワードと今回の授業で理解してほしいこと

前回のキーワード

- 空間内の曲面の法単位ベクトルと面積素
- 曲面上のスカラー場とベクトル場の面積分

今回の授業で理解してほしいこと

- 複素数とその四則演算
- 複素数平面
- 複素数の絶対値と偏角, そして極形式
- 複素数平面における四則演算の幾何的な意味

複素数

- 方程式 $x^2+1=0$ を考える.
  - $0 \leq x^2 = -1 < 0$ より, 実数の範囲では解が存在しないことがわかる.
  - 形式的に, この方程式の解を i とおく（$i^2=-1$ を満たす数）.
  - i を 虚数単位という.
- 実数 a, b に対し, $z = a + bi$ の形で表される数を複素数という.
  - a を z の実部といい $\mathrm{Re}(z)$ と表す.
  - b を z の虚部といい $\mathrm{Im}(z)$ と表す.
  - $b=0$ のとき, z を実数といい, $a=0$ のとき, z を純虚数という.
  - $a-bi$ を $z=a+bi$ の共役複素数といい, $\bar{z}$ と表す.
- ２つの複素数 z, w に対し, 「$\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(w)$ かつ $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(w)$」が成り立つとき, 「$z$ と w は等しい」といい, $z=w$ と表す.

複素数の四則演算

- 虚数単位 i をひとつの文字と思って, 実数係数の文字式の計算と同様にして, 複素数の四則演算を定義する.

$\boxed{\text{和}}$ $(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$

$\boxed{\text{差}}$ $(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i$

$\boxed{\text{積}}$ $(a+bi)(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2 = (ac-bd)+(ad+bc)i$

$\boxed{\text{商}}$ $\dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \dfrac{(ac+bd)+(-ad+bc)i}{c^2+d^2}$

- 任意の複素数 z に対し,
  - $z+\bar{z}\ (=2\mathrm{Re}(z))$ は実数である.
  - $z-\bar{z}\ (=2\mathrm{Im}(z)i)$ は純虚数である.
  - $z\bar{z} = \mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2$.

複素数の共役と四則演算

- 共役複素数をとる操作と四則演算の間には次のような関係がある.

$\boxed{\text{和}}$ $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

$\boxed{\text{差}}$ $\overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}$

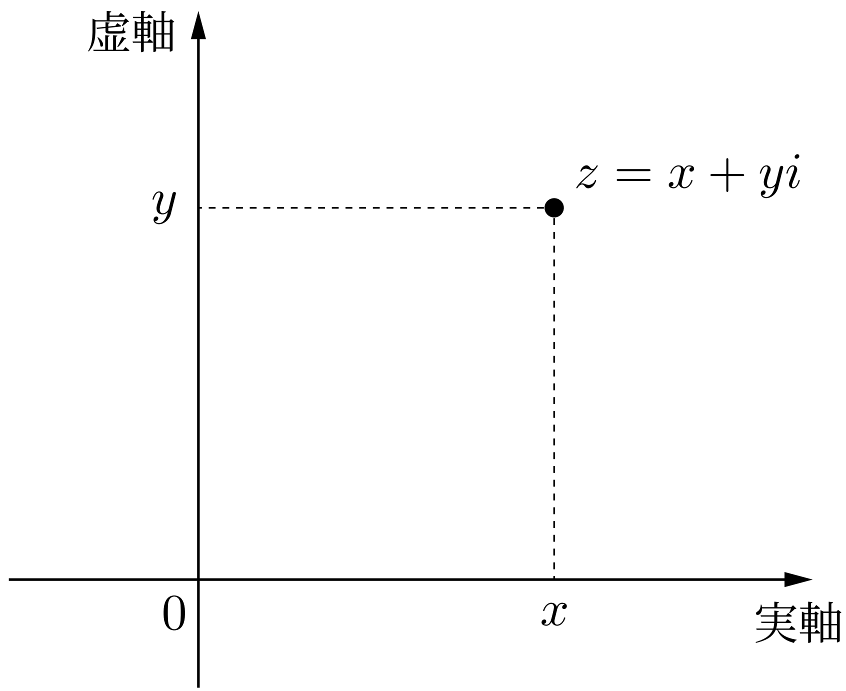
$\boxed{\text{積}}$ $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$

$\boxed{\text{商}}$ $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$

複素数平面

座標平面上の 点 $\mathrm{P}(x, y)$ に 複素数 $z = x + yi$ を対応させた平面のこと.

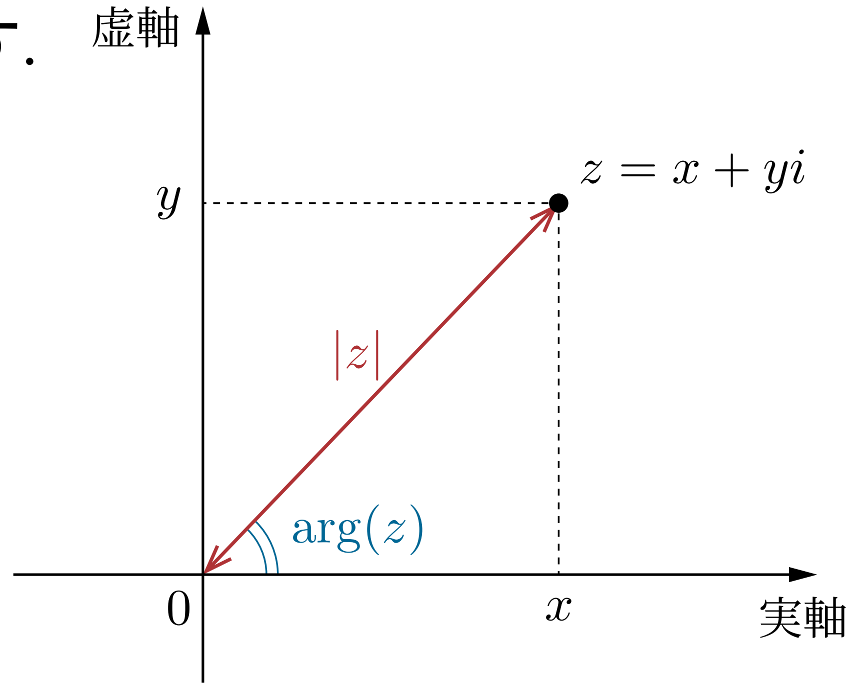
- x 軸の点は実数と対応し, y 軸の点は純虚数と対応する. これらをそれぞれ実軸, 虚軸とよぶ.



複素数平面

座標平面上の 点 $\mathrm{P}(x, y)$ に 複素数 $z = x + yi$ を対応させた平面のこと

- x 軸の点は実数と対応し, y 軸の点は純虚数と対応する. これらをそれぞれ<u>実軸</u>, <u>虚軸</u>とよぶ.
- 原点 0 と z の間の距離を「z の**絶対値**」といい, $|z|\,(=\sqrt{z\bar{z}})$ と表す.
- 実軸正の部分から, 原点 0 と z を結ぶ線分まで反時計周りに測った角のことを「z の**偏角**」といい, $\arg(z)$ と表す.



複素数の極形式

- z の絶対値を r, 偏角を θ とすると, $\boxed{z = r\,(\cos\theta + i\ \sin\theta)}$ と表すことができる. これを z の**極形式**という.
  - $\bar{z} = \overline{r\,(\cos\theta + i\ \sin\theta)} = r\,(\cos\theta - i\ \sin\theta) = r\,(\cos(-\theta) + i\ \sin(-\theta))$.

    つまり, $\boxed{|\bar{z}| = |z|}$, $\boxed{\arg(\bar{z}) = -\arg(z)}$ が成り立つ.
  - $z = r\,(\cos\theta + i\ \sin\theta)$ と $w = \ell\,(\cos\phi + i\ \sin\phi)$ の積は

    $$\begin{aligned} zw =& r\,(\cos\theta + i\ \sin\theta)\cdot \ell\,(\cos\phi + i\ \sin\phi) \\ =& r\ell\,\{\cos\theta\ \cos\phi - \sin\theta\ \sin\phi + i\,(\sin\theta\ \cos\phi + \cos\theta\ \sin\phi)\} \\ =& r\ell\,(\cos(\theta+\phi) + i\ \sin(\theta+\phi))\,. \end{aligned}$$

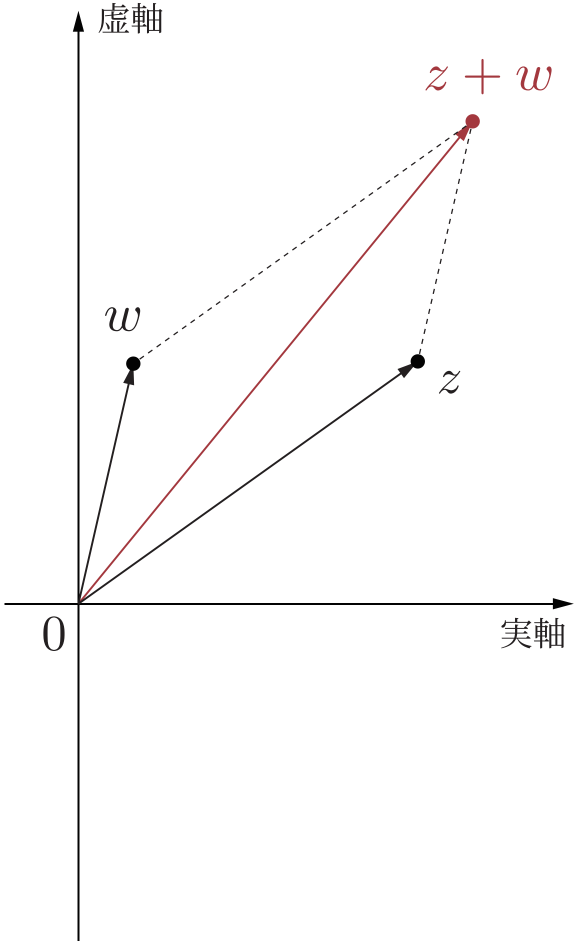
    つまり, $\boxed{|zw| = |z|\,|w|}$, $\boxed{\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)}$ が成り立つ.
  - $\displaystyle \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{r\,(\cos(-\theta) + i\ \sin(-\theta))}{r^2} = \frac{1}{r}\,(\cos(-\theta) + i\ \sin(-\theta))$.

    つまり, $\boxed{\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}}$, $\boxed{\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)}$ が成り立つ.

複素数の演算の幾何的な意味

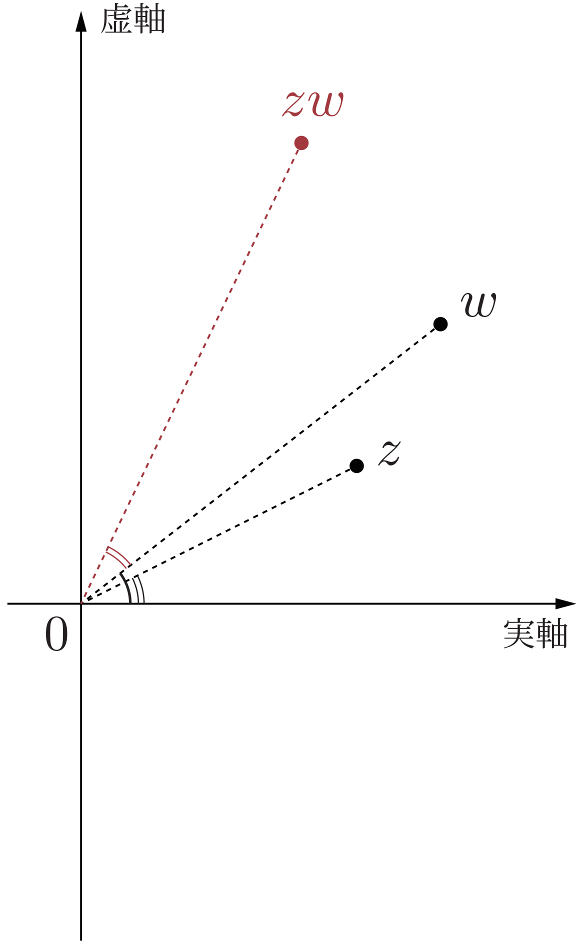
和と差

ベクトルの和と差



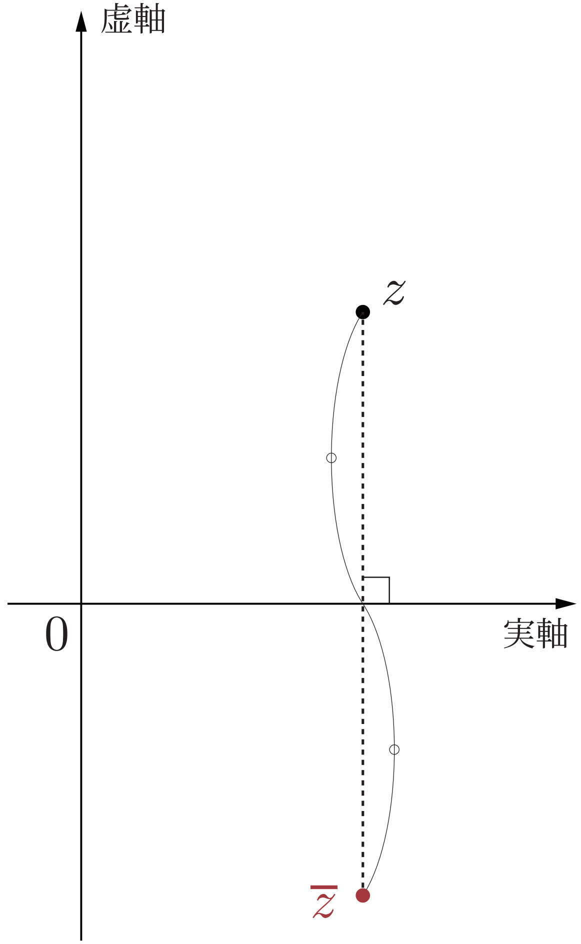
積と商

拡大・縮小と回転



共役

実軸に関する対称移動



まとめと復習（と予習）

- 複素数とはどのような数ですか？
  - 複素数の実部と虚部，共役複素数とは何ですか？
  - 複素数の四則演算はどのように定義されますか？
- 複素数平面とは何ですか？
  - 複素数の絶対値, 偏角とは何ですか？
  - 複素数の極形式とは何ですか？
  - 複素数の四則演算の幾何的な意味は？

教科書 p.116〜122

問題集 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217*

予　習 指数関数と三角関数のマクローリン展開 「数学」