数学クォータ科目「応用解析」第 5 回 / ベクトル解析（5)

面積分

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

前回のキーワードと今回の授業で理解してほしいこと

前回のキーワード

- 空間曲線の弧長と線素
- 曲線に沿ったスカラー場とベクトル場の線積分

今回の授業で理解してほしいこと

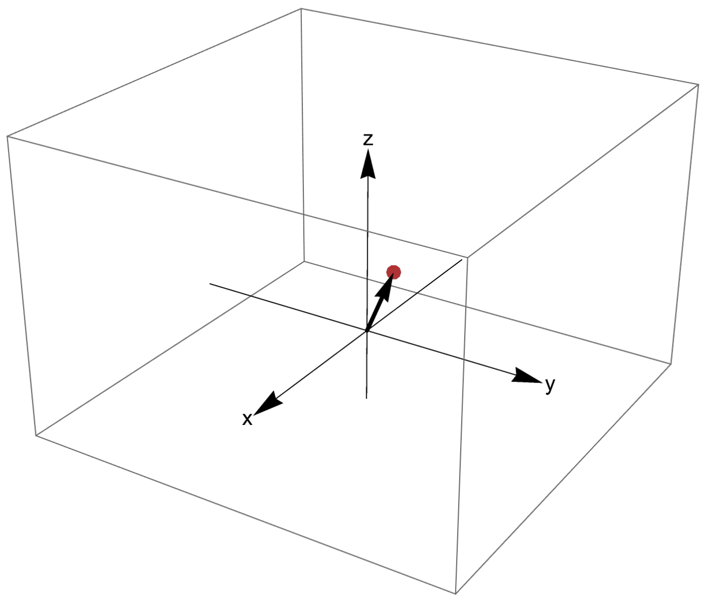
- 曲面（２変数ベクトル関数）の法単位ベクトルと面積素
- スカラー場の面積分
- ベクトル場の面積分

2変数ベクトル関数

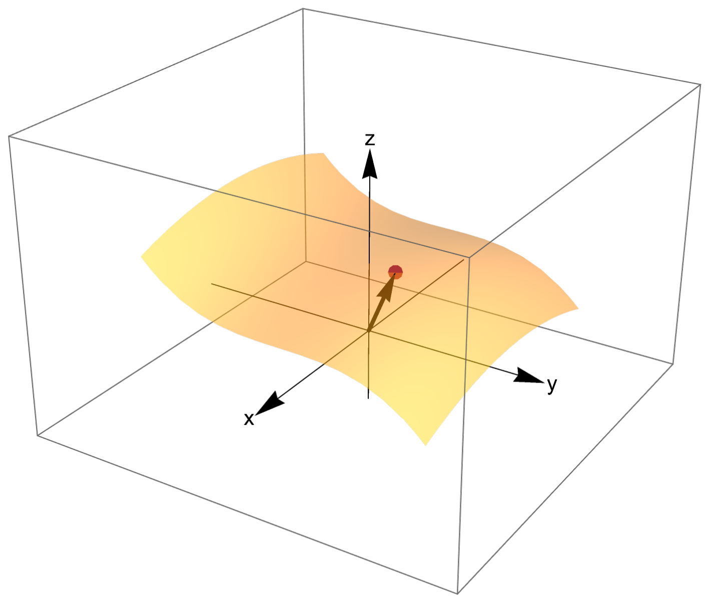
- 変数 u, v の値を決めると，その値に応じてベクトル $\boldsymbol{r}(u,v)$ がただ一つ定まるとき, $\boldsymbol{r}(u,v)$ を独立変数 u,v の（2変数）ベクトル関数という；

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\,\boldsymbol{i} + y(u,v)\,\boldsymbol{j} + z(u,v)\,\boldsymbol{k}$$

- $\boldsymbol{r}(u,v)$ の始点を定点 O に固定すると, $\boldsymbol{r}(u,v)$ の終点 P は一般に１つの曲面を描く（今後は, ２変数ベクトル関数と曲面を同一視して扱う）.



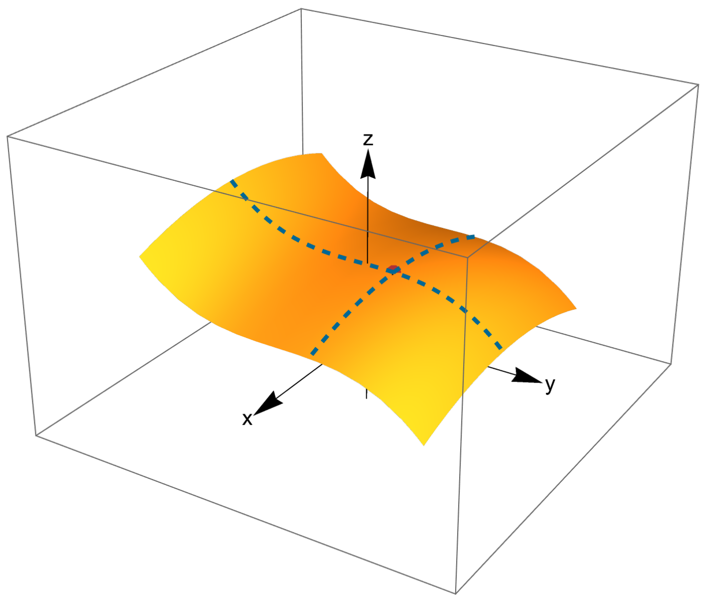
ベクトル関数 $\boldsymbol{r}(u,v)$



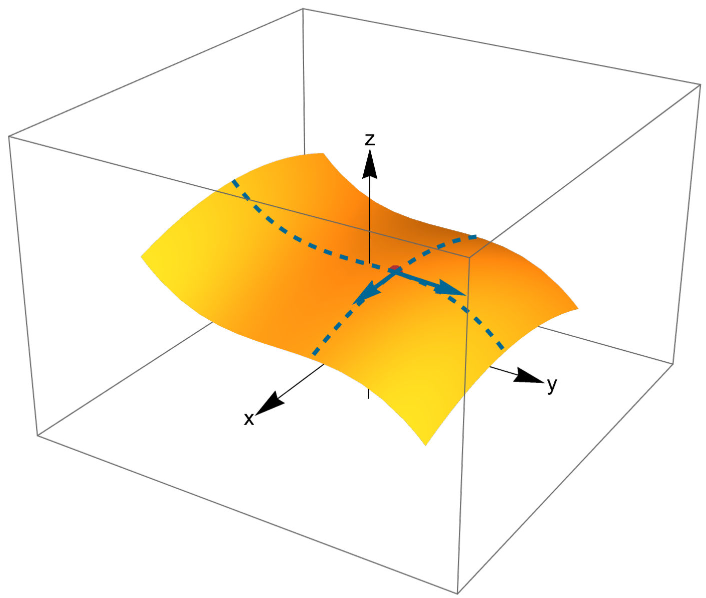
曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$

曲面の座標曲線

- 曲面 $\boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\,\boldsymbol{i} + y(u,v)\,\boldsymbol{j} + z(u,v)\,\boldsymbol{k}$ に対し, $v = b$ を固定すると１変数ベクトル関数 $u \mapsto \boldsymbol{r}(u,b) = x(u,b)\,\boldsymbol{i} + y(u,b)\,\boldsymbol{j} + z(u,b)\,\boldsymbol{k}$ が定まる. このようにして定まる曲線を u 曲線という.
- 同様に, v 曲線も定まる.
- $\boldsymbol{r}(u,v)$ を偏微分した $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(a,b)$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(a,b)$ は座標曲線の接ベクトル.



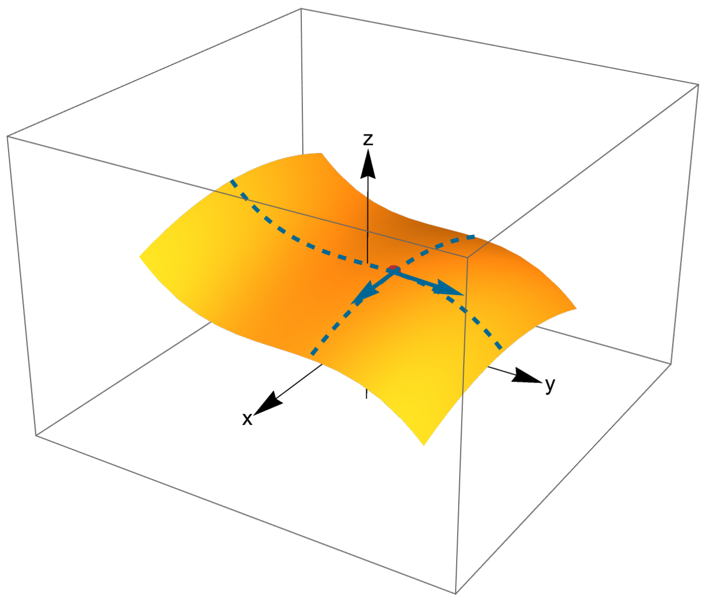
曲面の座標曲線



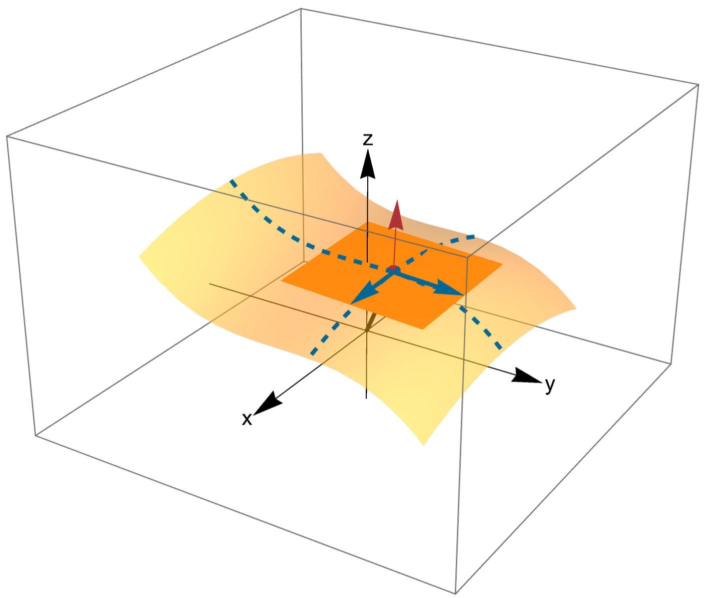
各座標曲線の接ベクトル

曲面の法単位ベクトル

- ２変数ベクトル関数 $\boldsymbol{r}(u,v)$ を曲面というときは, $\boxed{\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \neq \boldsymbol{0}}$ を仮定.
- $\boxed{\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|} \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}}$ を曲面の法単位ベクトルという.



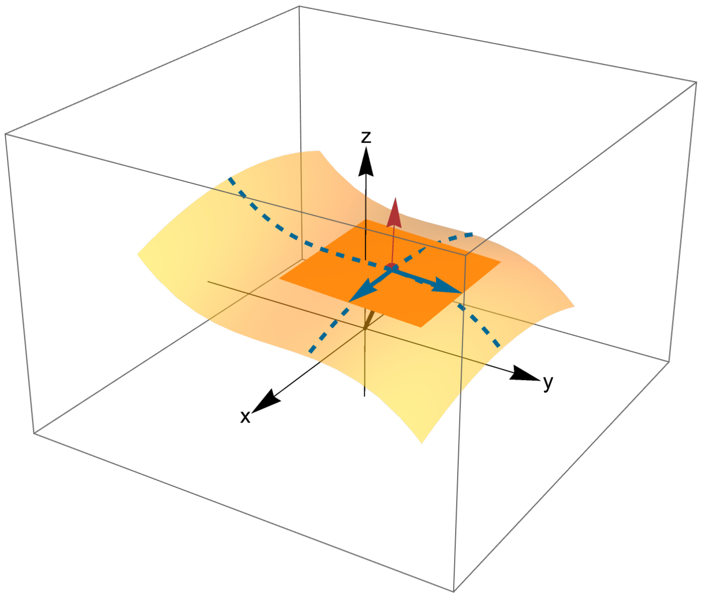
各座標曲線の接ベクトル



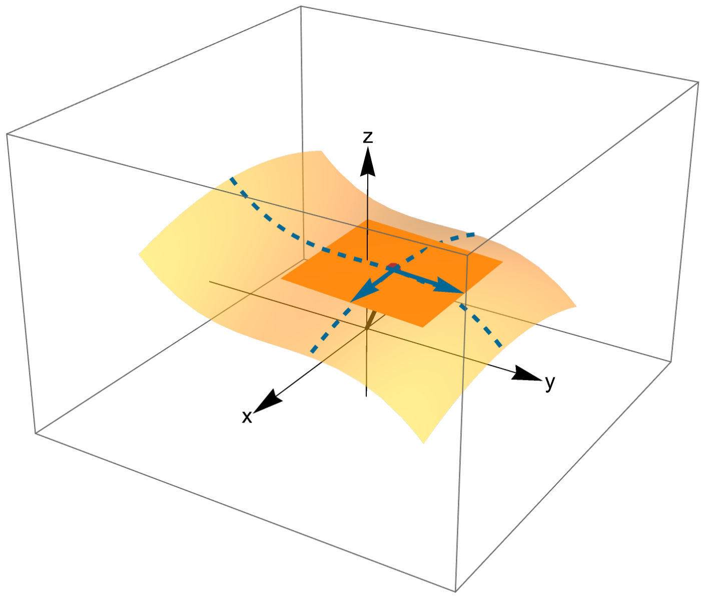
曲面の法単位ベクトル

曲面の接平面

- 点 $\boldsymbol{r}(a,b)$ を通り, ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(a,b)$ と $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(a,b)$ に平行な平面を「曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$ の点 $\boldsymbol{r}(a,b)$ における接平面」という.
- 接平面は, 点 $\boldsymbol{r}(a,b)$ を通り, 法単位ベクトルに垂直な平面である.
- $z = f(x,y)$ のグラフは曲面である（グラフ曲面）。
  $f(x,y)$ の１次近似式が, この曲面の接平面の方程式である。



曲面の法単位ベクトル



曲面の接平面

曲面の例（1）球面

例題） $\boldsymbol{r}(u,v)=\cos u\ \cos v\,\boldsymbol{i}+\sin u\ \cos v\,\boldsymbol{j}+\sin v\,\boldsymbol{k},\ (0\le u\le 2\pi,\ -\pi/2\le v\le \pi/2)$

の法単位ベクトル $\boldsymbol{n}(u,v)$ を求めよ.

曲面の例（1）球面

例題） $\boldsymbol{r}(u,v) = \cos u\ \cos v\,\boldsymbol{i} + \sin u\ \cos v\,\boldsymbol{j} + \sin v\,\boldsymbol{k},\ (0 \leq u \leq 2\pi,\ -\pi/2 \leq v \leq \pi/2)$

の法単位ベクトル $\boldsymbol{n}(u,v)$ を求めよ.　（答え）$\underline{\boldsymbol{n}(u,v) = \boldsymbol{r}(u,v)}$

（解）

○ $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = -\sin u\ \cos v\,\boldsymbol{i} + \cos u\ \cos v\,\boldsymbol{j}$

○ $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = -\cos u\ \sin v\,\boldsymbol{i} - \sin u\ \sin v\,\boldsymbol{j} + \cos v\,\boldsymbol{k}$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -\sin u\ \cos v & \cos u\ \cos v & 0 \\ -\cos u\ \sin v & -\sin u\ \sin v & \cos v \end{vmatrix}$$

$$= \cos u \cos^2 v\,\boldsymbol{i} - (-\sin u \cos^2 v)\,\boldsymbol{j}$$

$$+ (\sin^2 u \cos v \sin v - (-\cos^2 u \cos v \sin v))\,\boldsymbol{k}$$

$$= \cos u \cos^2 v\,\boldsymbol{i} + \sin u \cos^2 v\,\boldsymbol{j} + \cos v \sin v\,\boldsymbol{k}$$

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| = \sqrt{\cos^2 u \cos^4 v + \sin^2 u \cos^4 v + \cos^2 v \sin^2 v} = \cos v$$

曲面の例（２）２変数関数のグラフ曲面 $z = f(x, y)$

- ２変数関数 $f(x, y)$ に対し, 曲面 $\boldsymbol{r}(u, v) = u\,\boldsymbol{i} + v\,\boldsymbol{j} + f(u, v)\,\boldsymbol{k}$ が定まる.
- これは, $z = f(x, y)$ のグラフである.
  - $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \boldsymbol{i} + f_u(u, v)\,\boldsymbol{k}$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \boldsymbol{j} + f_v(u, v)\,\boldsymbol{k}$.
  - $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & f_u(u, v) \\ 0 & 1 & f_v(u, v) \end{vmatrix} = -f_u(u, v)\,\boldsymbol{i} - f_v(u, v)\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$
  - $\left| \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{f_u(u, v)^2 + f_v(u, v)^2 + 1}$
- 法単位ベクトルは, $\boldsymbol{n}(u, v) = \dfrac{1}{\sqrt{f_u(u,v)^2 + f_v(u,v)^2 + 1}} \left(-f_u(u, v)\,\boldsymbol{i} - f_v(u, v)\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\right)$.

曲面の例（３）平面

例題）$x+y+z=1\ (x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0)$ を満たす点の全体を考える. (1) この図形を $z=f(x,y)$ のグラフ曲面とみて, 法単位ベクトルを求めよ. また, (2) どのような図形であるか考察せよ.

(1)
- $z=1-x-y$ より, 曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)=u\,\boldsymbol{i}+v\,\boldsymbol{j}+(1-u-v)\,\boldsymbol{k}$ とみる.
- $$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1} = \sqrt{3}$$
- 法単位ベクトルは $\boldsymbol{n}(u,v)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$ である.

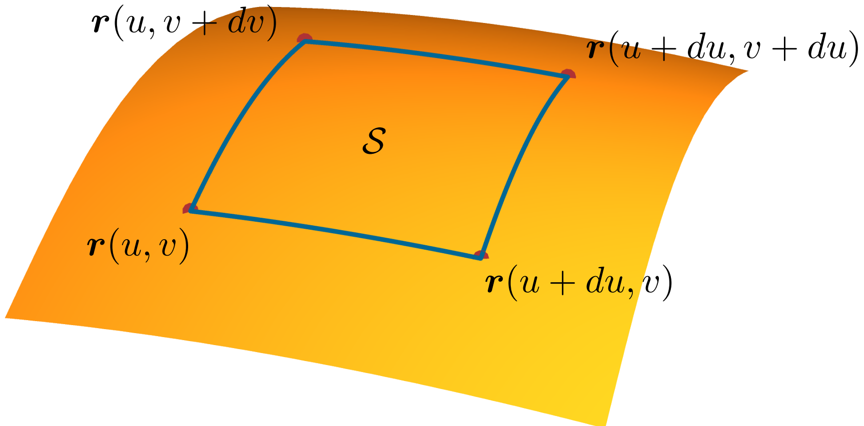
(2)
- 法単位ベクトルが定ベクトルである.
  このような性質を満たす曲面は平面である.
- 各座標軸との交点は $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ である.
- $x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$ なので, ３点を頂点とする三角形領域である.

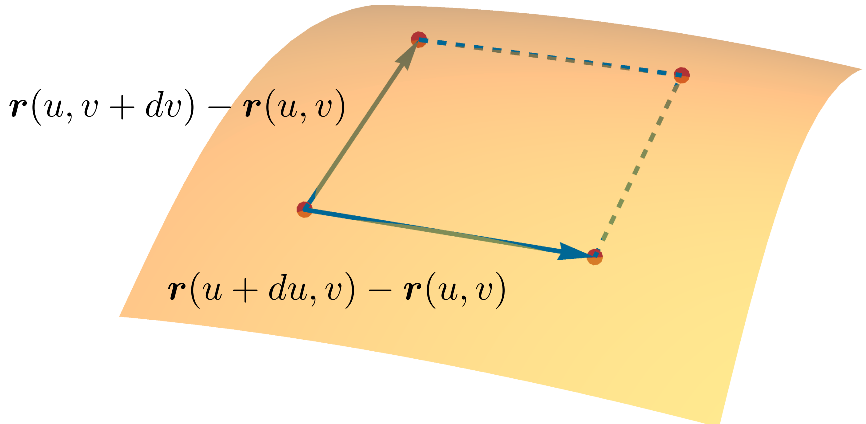
曲面の面積素

- 曲面 $S : \boldsymbol{r}(u,v)$ に対し, $\boxed{dS := \left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| dudv}$ を**面積素**という.
- 面積素の意味：

  曲面上の４点 $\underline{\boldsymbol{r}(u,v)}$, $\underline{\boldsymbol{r}(u+du,v)}$, $\underline{\boldsymbol{r}(u+du,v+du)}$, $\underline{\boldsymbol{r}(u,v+dv)}$ を頂点とする矩形領域の面積を $\mathcal{S}$ とすると,

$$\mathcal{S} \fallingdotseq \left(\begin{array}{l} \boldsymbol{r}(u+du,v) - \boldsymbol{r}(u,v) \text{ と } \boldsymbol{r}(u,v+dv) - \boldsymbol{r}(u,v) \text{ を} \\ 2 \text{ 辺とする平行四辺形の面積} \end{array} \right)$$





曲面の面積素

- 曲面 $S : \boldsymbol{r}(u,v)$ に対し, $\boxed{dS := \left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| dudv}$ を面積素という.
- 面積素の意味：

  曲面上の４点 $\underline{\boldsymbol{r}(u,v)}$, $\underline{\boldsymbol{r}(u+du,v)}$, $\underline{\boldsymbol{r}(u+du,v+du)}$, $\underline{\boldsymbol{r}(u,v+dv)}$ を頂点とする矩形領域の面積を $\mathcal{S}$ とすると,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S} &\fallingdotseq \left(\begin{array}{l} \boldsymbol{r}(u+du,v) - \boldsymbol{r}(u,v) \text{ と } \boldsymbol{r}(u,v+dv) - \boldsymbol{r}(u,v) \text{ を} \\ 2 \text{ 辺とする平行四辺形の面積} \end{array}\right) \\
&= |(\boldsymbol{r}(u+du,v) - \boldsymbol{r}(u,v)) \times (\boldsymbol{r}(u,v+dv) - \boldsymbol{r}(u,v))| \\
&= \left|\frac{\boldsymbol{r}(u+du,v) - \boldsymbol{r}(u,v)}{du} \times \frac{\boldsymbol{r}(u,v+dv) - \boldsymbol{r}(u,v)}{dv}\right| dudv \\
&\fallingdotseq \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| dudv
\end{aligned}
$$

曲面の面積素

- 曲面 $S : \boldsymbol{r}(u,v)$ に対し, $\boxed{dS := \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| dudv}$ を面積素という.
    - $\boldsymbol{r}(u,v)$ の定義域が uv 平面内の領域 D であるとき,

$$\iint_D dS = \iint_D \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| dudv$$

は曲面の面積を与える.

- 一方, $\boxed{d\boldsymbol{S} := \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} dudv}$ をベクトル面積素という.

$$d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| dudv = \boldsymbol{n}\, dS$$

例題）曲面の面積の計算

(1) 半径１の球面

$\boldsymbol{r}(u,v) = \cos u\ \cos v\,\boldsymbol{i} + \sin u\ \cos v\,\boldsymbol{j} + \sin v\,\boldsymbol{k},\ (0 \le u \le 2\pi,\ -\pi/2 \le v \le \pi/2)$

- 面積素は $dS = \cos v\,dudv$. よって, 面積の値は

$$\int_S dS = \iint_D \cos v\,dudv = \int_0^{2\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos v\,dv\right)du$$
$$= \int_0^{2\pi}[\sin v]_{-\pi/2}^{\pi/2}\,du = \int_0^{2\pi} 2\,du = 2[u]_0^{2\pi} = 4\pi.$$

例題）曲面の面積の計算

(2) **平面** $x + y + z = 1 \ (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$

$\boldsymbol{r}(u, v) = u\,\boldsymbol{i} + v\,\boldsymbol{j} + (1 - u - v)\,\boldsymbol{k}, \ (0 \leq u \leq 1, \ 0 \leq v \leq 1 - u)$

- **面積素は** $dS = \sqrt{3}\,dudv$. **よって, 面積の値は**

$$\int_S dS = \iint_D \sqrt{3}\,dudv = \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} \sqrt{3}\,dv \right) du$$

$$= \sqrt{3} \int_0^1 [v]_0^{1-u}\,du = \sqrt{3} \int_0^1 (1 - u)\,du$$

$$= \sqrt{3} \left[u - \frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

スカラー場の面積分

定義

uv 平面内の領域 D で定義された曲面 S : $\boldsymbol{r}(u,v)$ と, 曲面 S を含む空間内の領域で定義されたスカラー場 $\varphi(x,y,z)$ に対し,

$$\int_S \varphi\, dS := \iint_D \varphi(\boldsymbol{r}(u,v)) \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| dudv$$

を「曲面 S 上での φ の**面積分**」と言う.

スカラー場の面積分の計算手順

$$\int_S \varphi\, dS := \iint_{\boxed{D}} \boxed{\varphi(\boldsymbol{r}(u,v))}\ \boxed{\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|}\, dudv$$

(2)　(4)　(3)

(1) 曲面 S を表すベクトル関数 $\boxed{\boldsymbol{r}(u,v)}$ を定める.

(2) $\boldsymbol{r}(u,v)$ の定義域 $\underline{D\text{ を表す不等式}}$を求める（累次積分の式にするため）.

(3) 偏微分の外積 $\underline{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}}$ を計算し, その大きさ $\underline{\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|}$ を求める.

(4) スカラー場 φ に $\boldsymbol{r}$ を代入した式 $\underline{\varphi(\boldsymbol{r}(u,v))}$ を求める.

(5) (3) と (4) の積を D 上で **２重積分** する.

スカラー場の面積分の計算例

- 教科書 p.100 問題 3. (1)
  - スカラー場 $\varphi(x, y, z) = x + y + z$
  - 曲面 S : $2x + 2y + z = 4$ $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$

(1) S の式は $z = 4 - 2x - 2y$ と書けるので, グラフ曲面のベクトル関数

$$\boldsymbol{r}(u, v) = u\,\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + (4 - 2u - 2v)\,\boldsymbol{k}$$

として考える.

(2) これまでの議論から, この曲面は平面である. 各座標軸との交点（2 つの座標を 0 としたときの残りの座標の値）を求めると, $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 4)$ であるから, S はこれら 3 点を頂点とする三角形領域である. $\boldsymbol{r}(u, v)$ の定義域は, uv 平面内の原点, $(2, 0)$, $(0, 2)$ を頂点とする三角形領域なので, $D : 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 2 - u$ と表すことができる.

スカラー場の面積分の計算例

(3) $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \boldsymbol{i} - 2\,\boldsymbol{k}$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \boldsymbol{j} - 2\,\boldsymbol{k}$ より, $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

よって, $\left|\dfrac{\boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\boldsymbol{r}}{\partial v}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1} = \sqrt{9} = \boxed{3}$.

(4) $\varphi(\boldsymbol{r}(u, v)) = \varphi(u, v, 4 - 2u - 2v) = u + v + (4 - 2u - 2v) = \boxed{4 - u - v}$.

(5) 以上のことから, 面積分を計算すると,

$$\int_S \varphi\, dS = \iint_D \varphi(\boldsymbol{r}(u, v)) \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| dudv = \int_0^2 \left(\int_0^{2-u} 3(4 - u - v)\, dv\right) du$$

$$=3 \int_0^2 \left(\left[(4 - u)v - \frac{v^2}{2}\right]_0^{2-u}\right) du = 3 \int_0^2 \left(6 - 4u + \frac{u^2}{2}\right) du$$

$$=3 \left[6u - 2u^2 + \frac{u^3}{6}\right]_0^2 = \boxed{16}.$$

ベクトル場の面積分

定義

uv 平面内の領域 D で定義された曲面 $S : \boldsymbol{r}(u,v)$ と, 曲面 S を含む空間内の領域で定義されたベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ に対し,

$$\int_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} := \int_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iint_D \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right) dudv$$

を「曲面 S 上での $\boldsymbol{A}$ の面積分」と言う.

注 ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を流体の速度ベクトルとみるとき, 面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$ の値は「単位時間に曲面 S を通過する流体の量」と解釈することができる.

ベクトル場の面積分の計算手順

$$\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{\boxed{D}} \boxed{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(u,v))}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right)}\,dudv$$

(2) (4) (5) (3)

(1) 曲面 S を表すベクトル関数 $\boldsymbol{r}(u,v)$ を定める.

(2) $\boldsymbol{r}(u,v)$ の定義域 D を表す不等式を求める（累次積分の式にするため）.

(3) 偏微分の外積 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ を計算する.

(4) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に $\boldsymbol{r}$ を代入したベクトル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(u,v))$ を求める.

(5) (3) と (4) の内積を求める.

(6) (5) を D 上で ２重積分 する.

ベクトル場の面積分の計算例

- 教科書 p.102 演習問題 II-3 [A] 15(1)
  - ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x, y, z) = 2x\,\boldsymbol{i} - y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}$
  - 曲面 S : $z = 1 - x - y$ $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$

(1) S の式より $\boldsymbol{r}(u, v) = u\,\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + (1 - u - v)\,\boldsymbol{k}$ として考える.

(2) これまでの議論から, この曲面は平面である. 各座標軸との交点（2つの座標を 0 としたときの残りの座標の値）を求めると, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ であるから, S はこれら 3 点を頂点とする三角形領域である. $\boldsymbol{r}(u, v)$ の定義域は, uv 平面内の原点, $(1, 0)$, $(0, 1)$ を頂点とする三角形領域なので, $D : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1 - u$ と表すことができる.

(3) $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ より, $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

ベクトル場の面積分の計算例

(4) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(u,v)) = \boldsymbol{A}(u,v,1-u-v) = \boxed{2u\,\boldsymbol{i} - v\,\boldsymbol{j} + (1-u-v)\,\boldsymbol{k}}$.

(5) (3) と (4) の内積を計算する.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right) &= (2u\,\boldsymbol{i} - v\,\boldsymbol{j} + (1-u-v)\,\boldsymbol{k}) \cdot (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) \\ &= 2u \times 1 + (-v) \times 1 + (1-u-v) \times 1 \\ &= 2u - v + 1 - u - v = \boxed{1 + u - 2v}.\end{aligned}$$

(6) (5) を D 上で２重積分する.

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} (1+u-2v)\,dv\right) du = \int_0^1 \left(\Big[(1+u)v - v^2\Big]_0^{1-u}\right) du \\ &= \int_0^1 \left(2u - 2u^2\right) du = \left[u^2 - \frac{2}{3}u^3\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

積分公式（1）ガウスの発散定理

定理

V を空間内の閉領域とし, その表面を S とする（ただし, 曲面 S の法単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ は V の外側を向いているとする）.
このとき, V を含む領域で定義されたベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対し,

$$\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{A}\, dxdydz = \int_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

が成り立つ.

$\boxed{\text{注}}$ ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を流体の速度ベクトルとみるとき,「単位時間に V の中で生じる流体の量」が「単位時間に V の外に流れ出る流体の量」に等しいことを表している.

積分公式（２）ストークスの定理

定理

S を境界をもつ曲面とし, その境界の曲線を C とする（ただし, 曲線 C の向きは, S の法単位ベクトルと右ねじの関係にあるとする）.
このとき, S を含む空間内の領域で定義されたベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対し,

$$\int_C \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{t}\, ds = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

が成り立つ.

注　ベクトル場 A を流体の速度ベクトルとみるとき,「単位時間に S の表面において発生する渦の量」が「単位時間に S のふちを廻っている流体の量」に等しいことを表している.

まとめと復習（と予習）

- 曲面の法単位ベクトルとは何ですか？
- 曲線の面積素, ベクトル面積素とは何ですか？
- スカラー場の 面積分の定義は？
- ベクトル場の 面積分の定義は？

教科書 **p.96〜100, 103〜113***

問題集 **204, 205, 206, 207, 208, 209*, 210***

※ 次回から「複素関数論」