数学クォータ科目「応用解析」第 2 回 / ベクトル解析（2）

スカラー場の勾配

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

前回のキーワードと今回の授業で理解してほしいこと

前回のキーワード

- ベクトル関数，ホドグラフ，ベクトル関数の微分（導関数）
  ベクトル関数の不定積分と定積分

今回の授業で理解してほしいこと

- スカラー場とベクトル場の定義
- スカラー場の等位面
- スカラー場の勾配
- スカラー場の方向微分係数

スカラー場とベクトル場

定義

空間内のある領域 Ω 内の任意の点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ に対し, スカラー（たとえば実数） $\varphi(x, y, z)$ が対応するとき, この対応を Ω 上の **スカラー場** という.

$\boxed{\text{注}}$ スカラー場とは, 定義域が Ω の３変数関数 $\varphi(x, y, z)$ のことである.

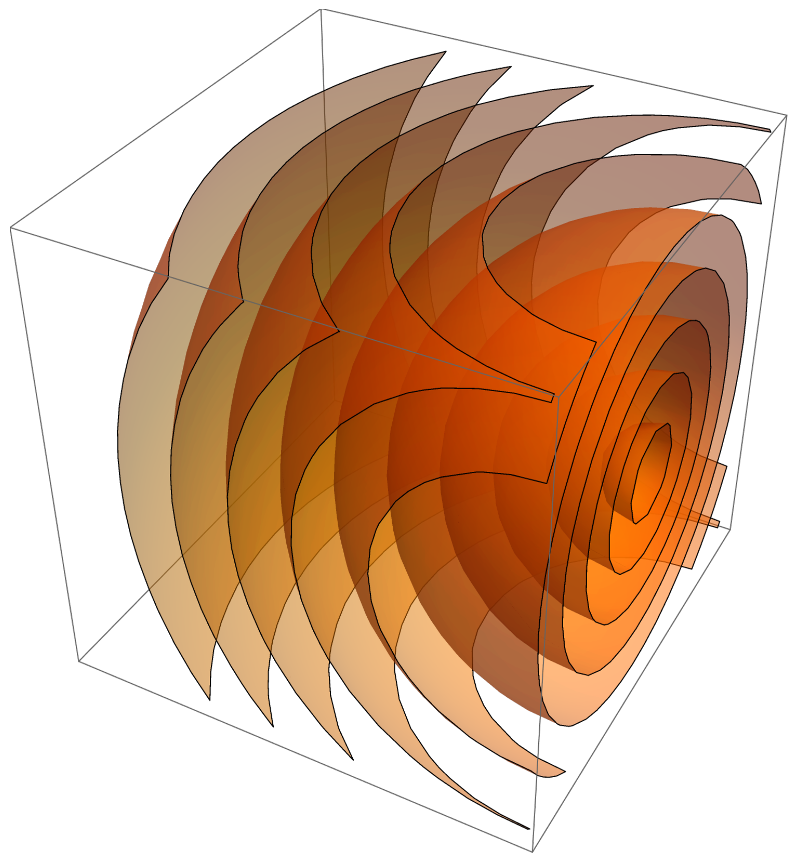
定義

空間内のある領域 Ω 内の任意の点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ に対し, ベクトル $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ が対応するとき, この対応を Ω 上の **ベクトル場** という.

$\boxed{\text{注}}$ $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ は空間ベクトルなので, $\boldsymbol{A}(x, y, z) = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$ と基本ベクトル表示できる. 各成分の値は, 点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ に対して決まるので, A_x, A_y, A_z は３変数関数である. つまり, ベクトル場とは, ３変数関数の三つ組のことである.

スカラー場の等位面

例）$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$



定義

スカラー場 $\varphi(x, y, z)$ と定数 c に対し，$\varphi(x, y, z) = c$ を満たす点 (x, y, z) の全体は，一般に空間内の曲面となる．これをスカラー場の**等位面**という．

スカラー場の勾配とナブラ演算子 ∇

定義

スカラー場 $\varphi(x, y, z)$ に対し,

$$\boxed{\mathrm{grad}\varphi} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

で定まるベクトル場を, $\varphi(x, y, z)$ の**勾配**という.

注 ベクトル微分演算子 $\nabla = \boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ を導入すると, 次のような形式的な計算が可能である.

$$\nabla\varphi = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi = \boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

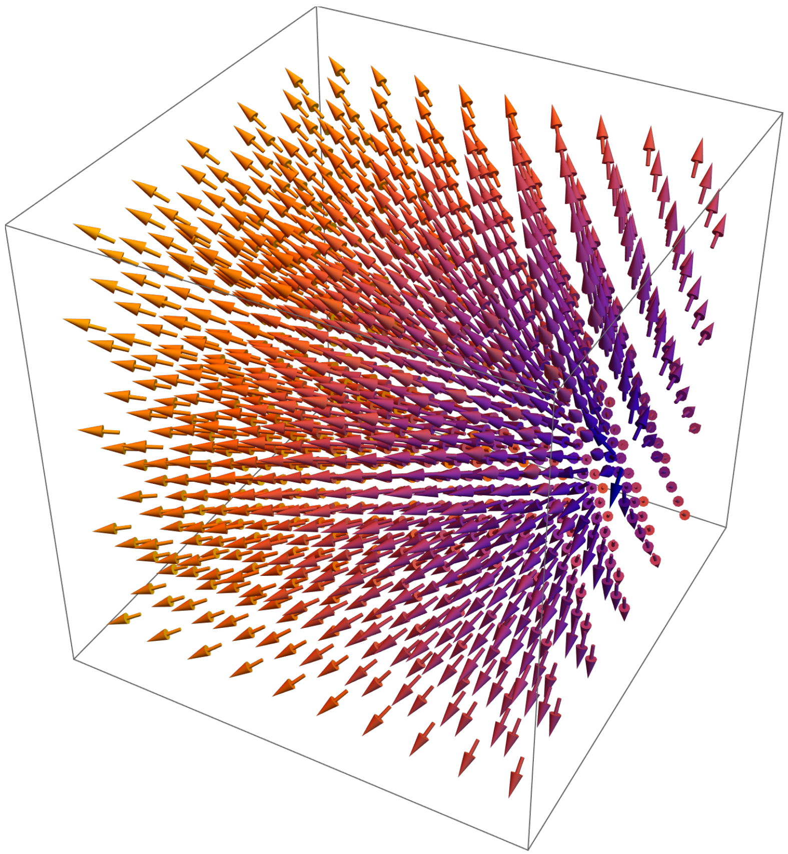
よって, $\varphi(x, y, z)$ の勾配を $\boxed{\nabla\varphi}$ と書くこともある.

スカラー場の勾配とナブラ演算子 ∇

例） $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ の勾配は

$$
\begin{aligned}
\nabla\varphi =& \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2) + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + z^2) + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2 + z^2) \\
=& 2x\,\boldsymbol{i} + 2y\,\boldsymbol{j} + 2z\,\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

となる.



スカラー場の勾配の性質

定理

$\varphi(x, y, z)$ をスカラー場とし, その勾配を $\nabla\varphi$ と書く.

(1) $\nabla\varphi(\mathrm{P})$ を, 点 P を始点とするベクトルと考えると, $\nabla\varphi(\mathrm{P})$ は点 P を通る等位面に対して垂直である.

（証明は省略）

(2) スカラー場 φ の値は, 勾配 $\nabla\varphi$ の方向に沿って最も増加する.

（スライド p.10 を参照）

スカラー場の方向微分係数

定義

スカラー場 $\varphi(x,y,z)$ の定義域内の 点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ と,
単位ベクトル $\boldsymbol{u} = u_x\boldsymbol{i} + u_y\boldsymbol{j} + u_z\boldsymbol{k}$ に対し,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{u}}(\mathrm{P}) := \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(\boldsymbol{p}+h\boldsymbol{u}) - \varphi(\boldsymbol{p})}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x-hu_x, y-hu_y, z-hu_z) - \varphi(x,y,z)}{h}$$

をスカラー場 φ の点 P における $\boldsymbol{u}$ 方向への方向微分係数という.
(ただし, $\boldsymbol{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$)

スカラー場の方向微分係数の意味と計算方法

- 点 P(x, y, z) と単位ベクトル $\boldsymbol{u} = u_x\boldsymbol{i} + u_y\boldsymbol{j} + u_z\boldsymbol{k}$ を固定し,
  ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{p} + t\,\boldsymbol{u} = (x + tu_x, y + tu_y, z + tu_z)$ を考える.
  ($\boldsymbol{A}(t)$ のホドグラフは, 点 P を通り, ベクトル $\boldsymbol{u}$ に平行な直線である)

- $\Phi(t) := \varphi(\boldsymbol{A}(t))$ とおき, $t = 0$ における微分係数 $\Phi'(0)$ を計算すると

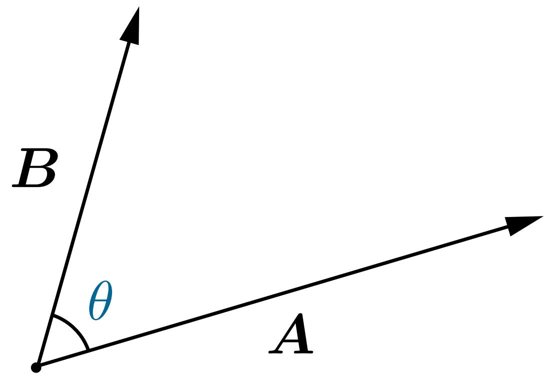
$$\Phi'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{\Phi(0+h) - \Phi(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(\boldsymbol{A}(h)) - \varphi(\boldsymbol{A}(0))}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x - hu_x, y - hu_y, z - hu_z) - \varphi(x, y, z)}{h} = \frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{u}}(\mathrm{P})$$

- 合成関数の微分の公式を利用して, $\Phi'(0)$ を計算すると

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{u}}(\mathrm{P}) = \Phi'(0) = u_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\mathrm{P}) + u_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\mathrm{P}) + u_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}(\mathrm{P}) = \boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi(\mathrm{P})$$

【復習４】ベクトルの内積

- ベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ があり, 始点が一致するよう平行移動したとき, ２つのベクトル（線分）のなす角が θ であるとする.



- このとき, $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の 内積 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ を以下の式で定義する.

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \cos\theta$$

- $\boldsymbol{A} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}, \boldsymbol{B} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$ と基本ベクトル表示されるとき, 内積は $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ と表される.

スカラー場の方向微分係数の意味と計算方法

つまり, 方向微分係数 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{u}}(\mathrm{P})$ は

- 点 P からベクトル $\boldsymbol{u}$ の方向に動いたときの スカラー場の変化率 のことである.
- 偏微分係数を一般化したものである；

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{i}}(\mathrm{P}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\mathrm{P}), \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{j}}(\mathrm{P}) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\mathrm{P}), \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{k}}(\mathrm{P}) = \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\mathrm{P}).$$

- $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{u}}(\mathrm{P}) = \boldsymbol{u} \cdot \nabla \varphi(\mathrm{P})$

→ 方向微分係数の値が最大となるのは, $\boldsymbol{u}$ が勾配 $\nabla \varphi$ と同じ方向のとき.

まとめと復習（と予習）

- スカラー場とは何ですか？
  - スカラー場の等位面とは何ですか？
  - スカラー場の勾配とは何ですか？（ナブラ演算子とは？）
  - スカラー場の方向微分係数とは何ですか？
  - スカラー場の方向微分係数と勾配の関係は？
- ベクトル場とは何ですか？

教科書 **p.80〜84**

問題集 **190, 191, 192, 193, 194**

予 習 ２次と３次の行列式 「数学」