数学クォータ科目「基礎数学 II」第 7 回

# 面積と体積

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

# これまでのまとめ（1）

- 関数 $y = f(x)$ がある．
  - $x = a$ における微分係数（ 平均変化率 の極限）
    （$y = f(x)$ のグラフの $x = a$ における接線の傾きの値）

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}} = \lim_{h \to 0} \boxed{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

  - 導関数 （関数 $f(x)$ の微分） $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

- 微分の性質 関数 $f(x), g(x)$ と定数 $k$ に対し，

(1-1) $\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(t)$

(1-2) $\{k\,f(x)\}' = k\,f'(x)$

# これまでのまとめ（2）

- **基本的な関数の微分**

(2-1) $(x^{\alpha})' = \alpha\, x^{\alpha-1}$ ($\alpha$ は実数)

(2-2) $(k)' = 0$（すなわち，定数関数の微分は消える）

(2-3) $(\sin x)' = \cos x$

(2-4) $(\cos x)' = -\sin x$

(2-5) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

(2-6) $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$

(2-7) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \log a}$　　特に，$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$

(2-8) $(a^x)' = a^x \log a$　　特に，$(e^x)' = e^x$

# これまでのまとめ（3）

- **微分公式**

(3-1) **合成関数の微分：** $\dfrac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x)$

**特に，** $\dfrac{d}{dx}f(ax+b) = a\,f'(ax+b)$

(3-2) **積の微分公式：** $\{f(x)\cdot g(x)\}' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

(3-3) **商の微分公式：** $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$

**特に，** $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}' = -\dfrac{g'(x)}{g(x)^2}$

(3-4) **対数微分法：** $f'(x) = f(x)\cdot(\log f(x))'$

# これまでのまとめ（4）

- 関数 $y = f(x)$ がある．
  - $F'(x) = f(x)$ を満たす関数を $f(x)$ の原始関数という．
  - $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ を $f(x)$ の不定積分という．
  - $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ を（区間 $a \leq x \leq b$ における）$f(x)$ の定積分という．

- 不定積分の性質 関数 $f(x), g(x)$ と定数 $k$ に対し，

$$(4\text{-}1)\quad \int \{f(x) \pm g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

$$(4\text{-}2)\quad \int \{k\,f(x)\}\,dx = k\int f(x)\,dx$$

# これまでのまとめ（5）

- 定積分の性質 関数 $f(x), g(x)$ と定数 $a, b, c, k$ に対し，

(6-1) $\displaystyle\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

(6-2) $\displaystyle\int_a^b \{k\,f(x)\}\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

(6-3) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$ (6-4) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

(6-5) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx$

- 積分の計算方法

(5-1) 置換積分法 (5-2) 部分積分法

(5-3) 三角関数の加法定理（積和の公式）を利用する方法

# 今週のこと

- 定積分の厳密な定義
- 定積分を応用した面積と体積の計算

# 定積分の定義

- 区間 $a \le x \le b$ とそこで有界な関数 $f(x)$ に対して定まる量．
- 「$x = a$ から $b$ までの $f(x)$ の定積分」を

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

と書く．

- これはリーマン和の極限として定義される（教科書 p.130 を参照）．
- $a \le x \le b$ で $f(x) \ge 0$ のとき，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は，
$y = f(x)$ のグラフと直線 $x = a,\ x = b,\ x$ 軸で囲まれる図形の面積である．

# 定積分と原始関数

- 定積分の値は

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = [F(x)]_{a}^{b} = F(b) - F(a)$$

ただし，$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数．

- なぜ，定積分が原始関数を利用して計算できるのか？

  $\longrightarrow$ 微分積分学の基本定理

# 微分積分学の基本定理

**定理**

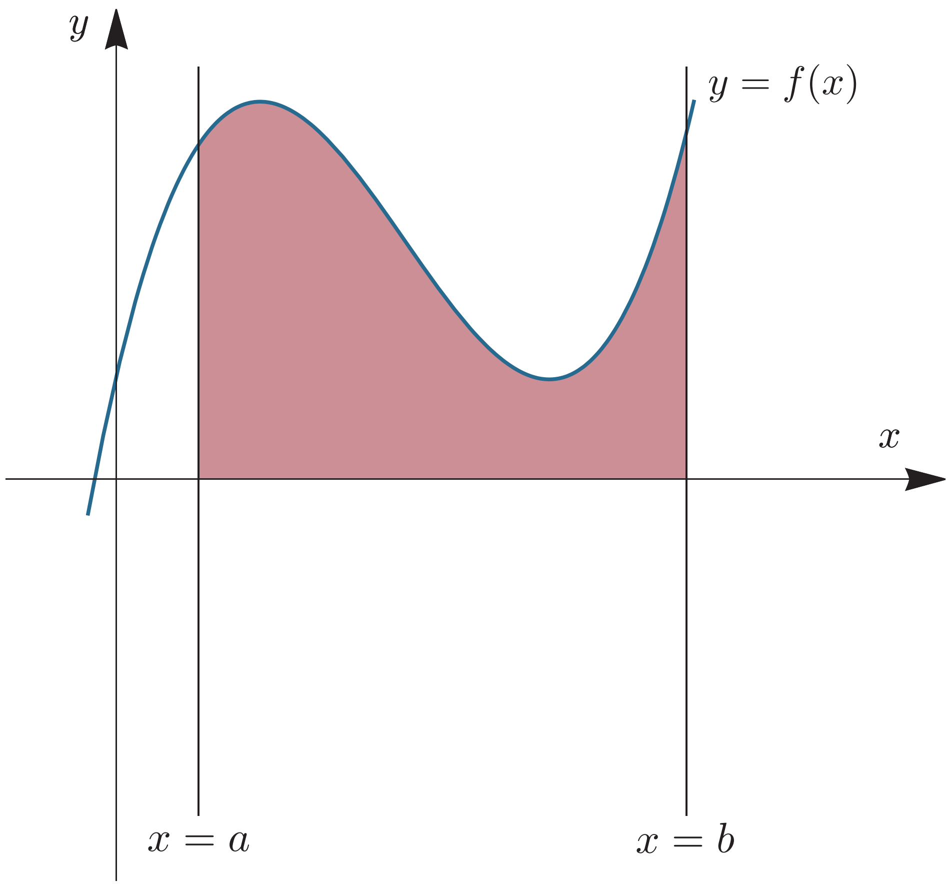
$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ とおく．このとき，$S'(x) = f(x)$ が成り立つ．

- この定理より，$S(x)$ は $f(x)$ の原始関数．よって，$S(x) = F(x) + C$ ．
- $S(a) = 0$ と定める．
  つまり，$0 = S(a) = F(a) + C$ より，$C = -F(a)$ である．
- よって，$\int_a^b f(x)\,dx = S(b) = F(b) + C = F(b) + (-F(a)) = [F(x)]_a^b$.
- 定積分の計算によって，平面内の領域の面積を求めることができる．

# 定積分を利用した面積の計算（1）

問１）$y = f(x)$ のグラフと，$x$ 軸，直線 $x = a,\ x = b$ で囲まれる図形の面積 $S$ を求めなさい．

$a \leq x \leq b$ で $f(x) \geq 0$ の場合

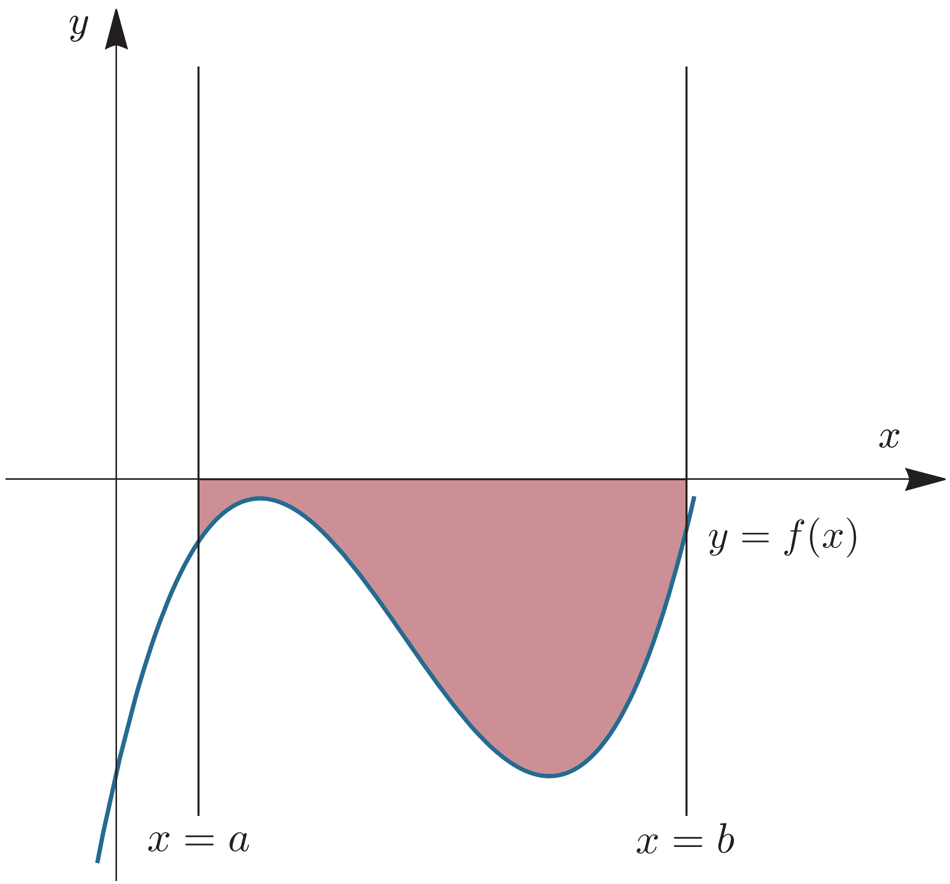



$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

# 定積分を利用した面積の計算（２）

問２）$y = f(x)$ のグラフと，$x$ 軸，直線 $x = a,\ x = b$ で囲まれる図形の面積 $S$ を求めなさい．

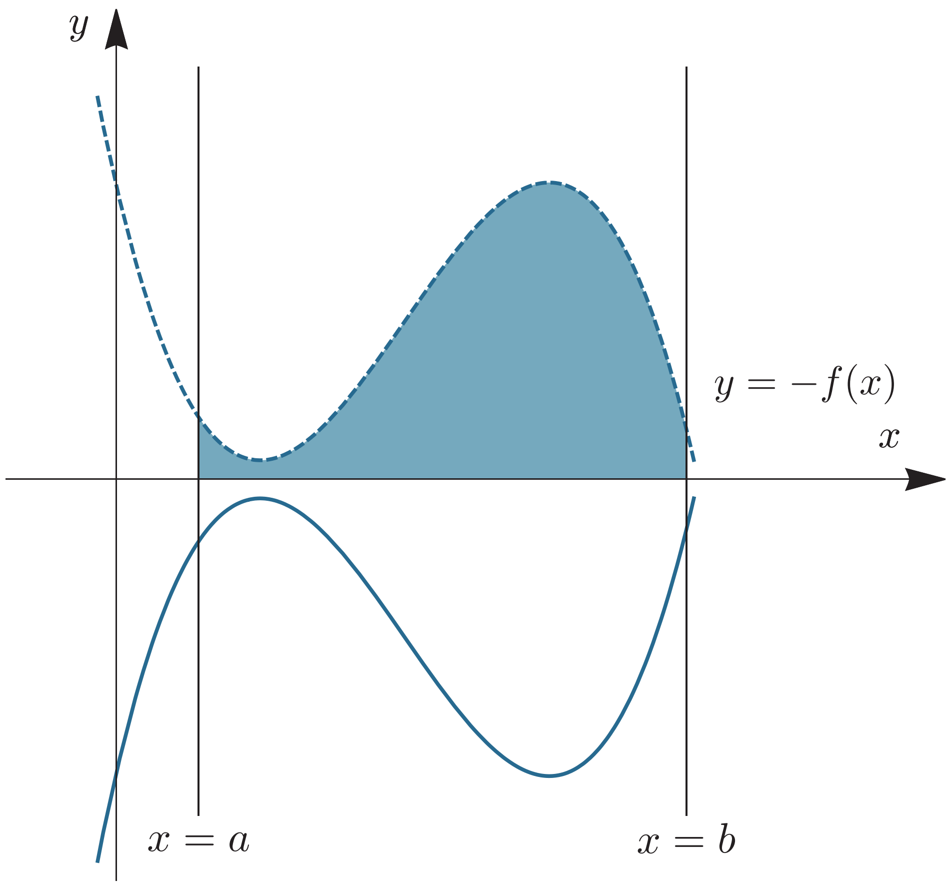
$a \leq x \leq b$ で $f(x) \leq 0$ の場合



# 定積分を利用した面積の計算（2）

問2）$y=f(x)$ のグラフと，$x$ 軸，直線 $x=a,\ x=b$ で囲まれる図形の面積 $S$ を求めなさい．

$a \leq x \leq b$ で $f(x) \leq 0$ の場合




$y=-f(x)$ はこの区間で非負かつ，グラフと３直線で囲まれる図形の面積は，$x$ 軸に関して対称なので，元の図形の面積に等しい．よって

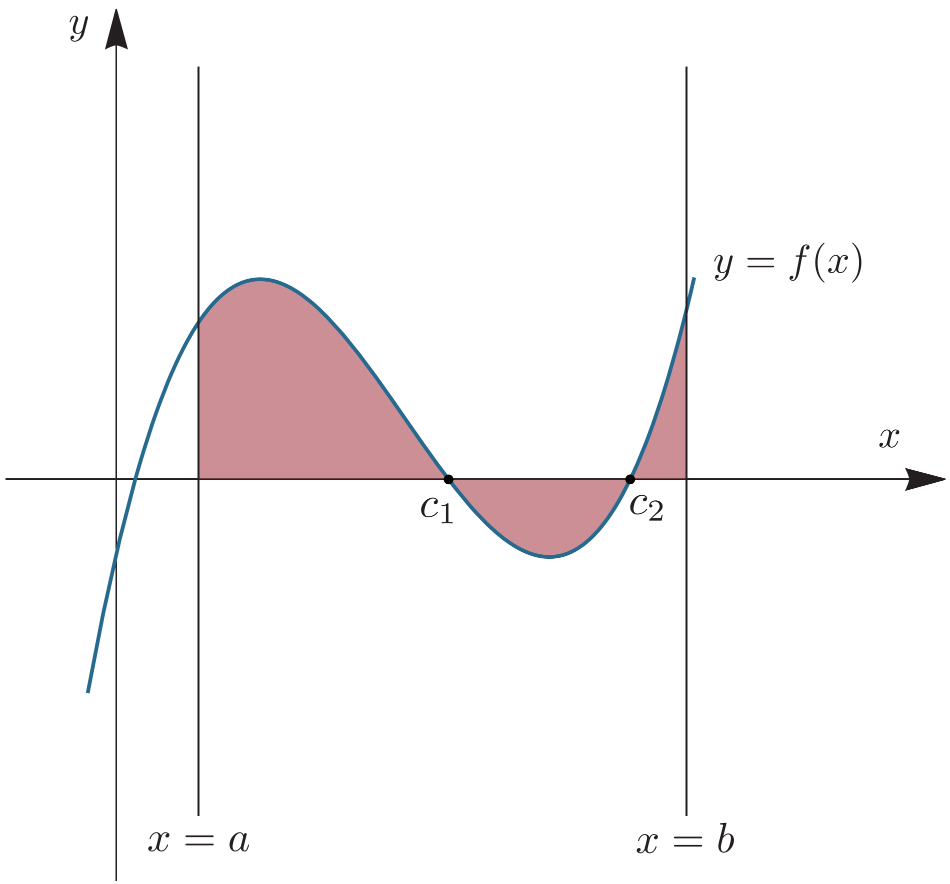
$$S = \int_a^b (-f(x))\,dx$$

$$= -\int_a^b f(x)\,dx$$

# 定積分を利用した面積の計算（３）

問３）$y = f(x)$ のグラフと，$x$ 軸，直線 $x = a, x = b$ で囲まれる図形の面積 $S$ を求めなさい．

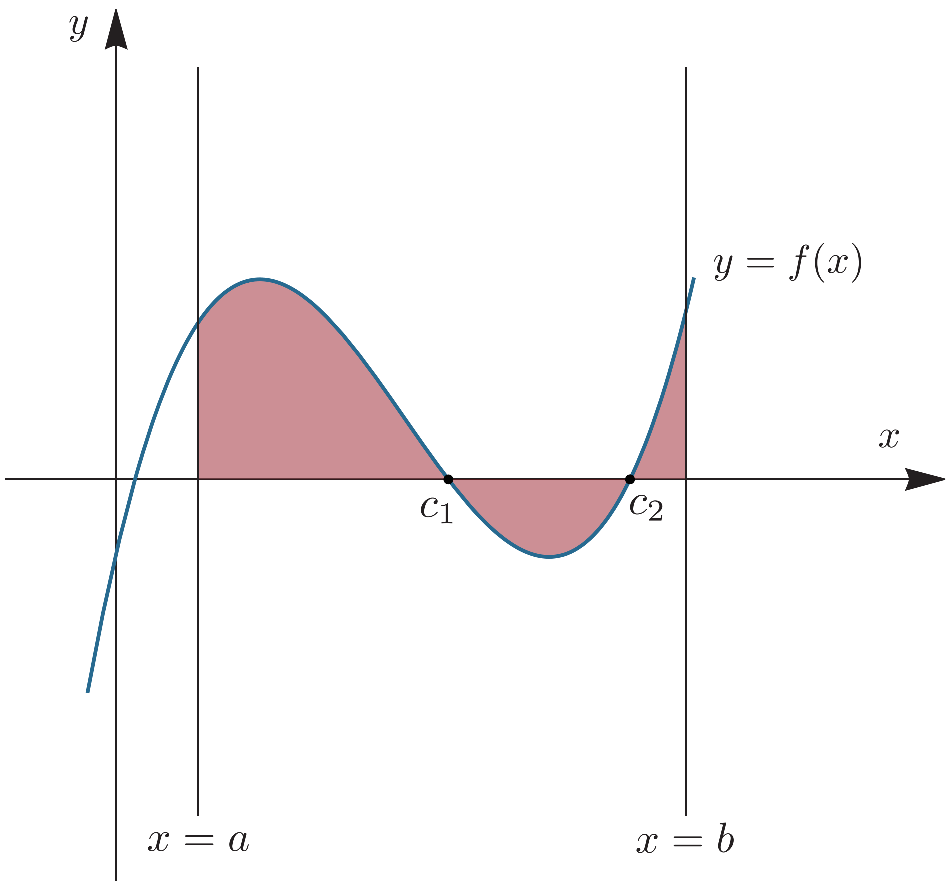
$a \leq x \leq b$ で $f(x)$ の符号が変わる場合



# 定積分を利用した面積の計算（３）

問３）$y = f(x)$ のグラフと，$x$ 軸，直線 $x = a,\ x = b$ で囲まれる図形の面積 $S$ を求めなさい．

$a \leq x \leq b$ で $f(x)$ の符号が変わる場合



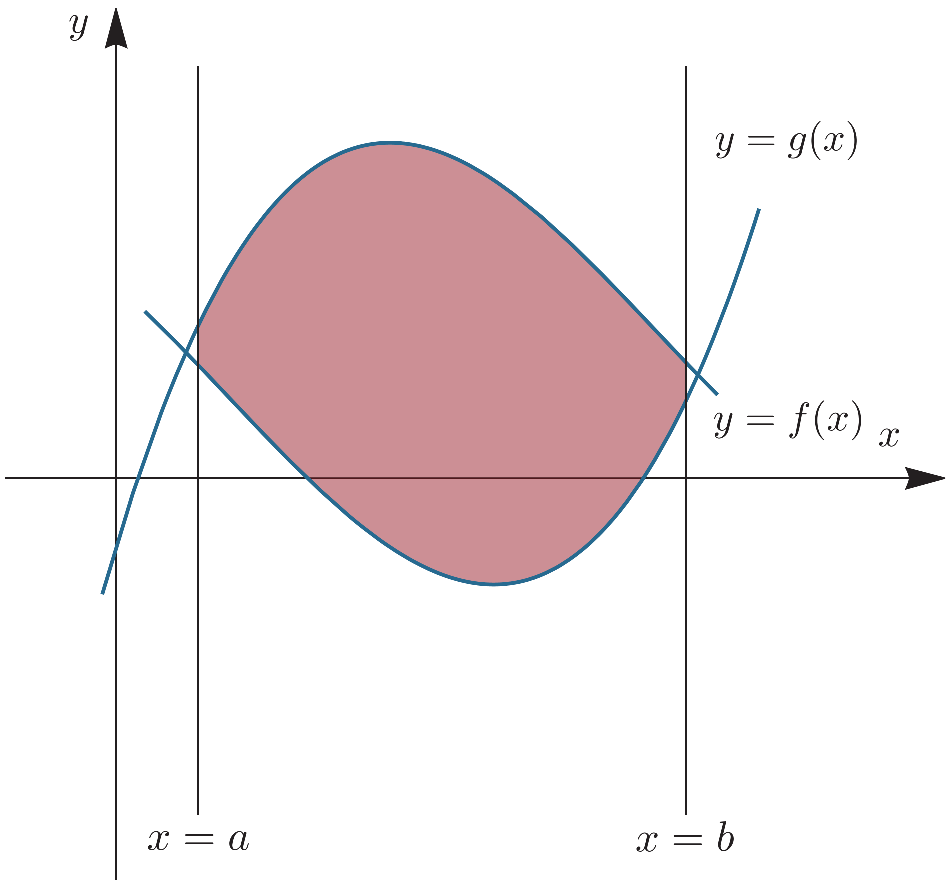

$x$ 軸との交点を求め，各区間で面積がどのような定積分の式で表されるか考察する．

左図の場合は

$$S = \int_a^{c_1} f(x)\,dx - \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{b} f(x)\,dx$$

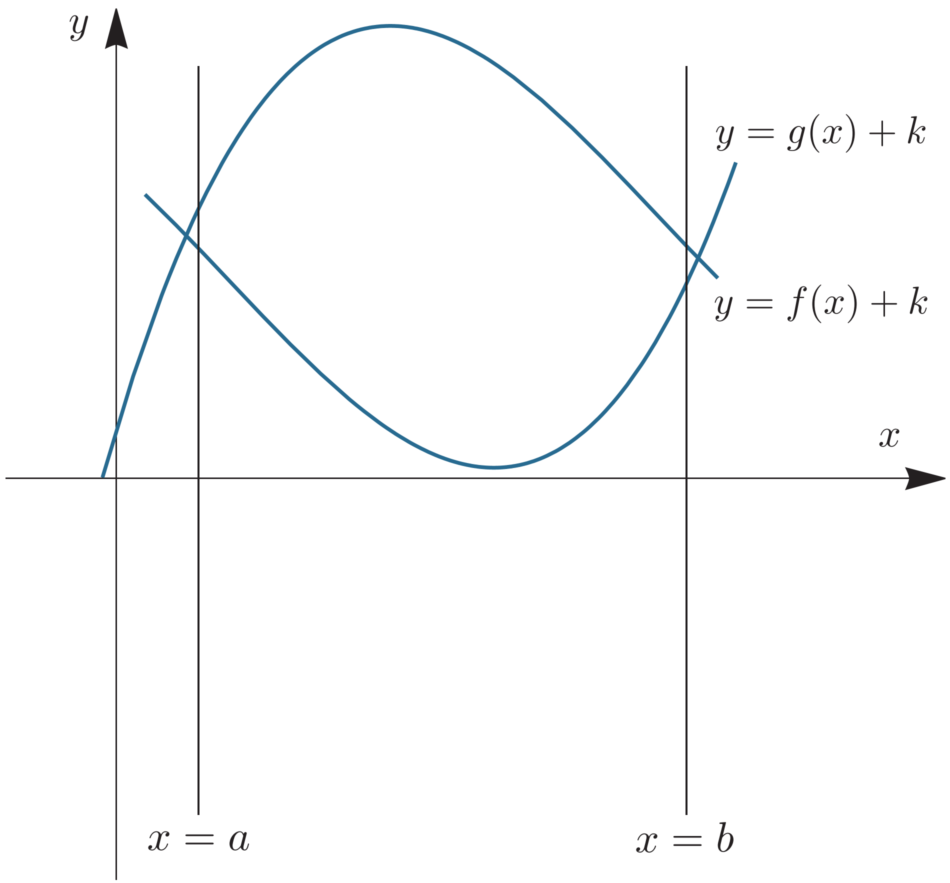
# 定積分を利用した面積の計算（４）

問４）２つの関数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ のグラフと，直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれる図形の面積 $S$ を求めなさい．



# 定積分を利用した面積の計算（４）

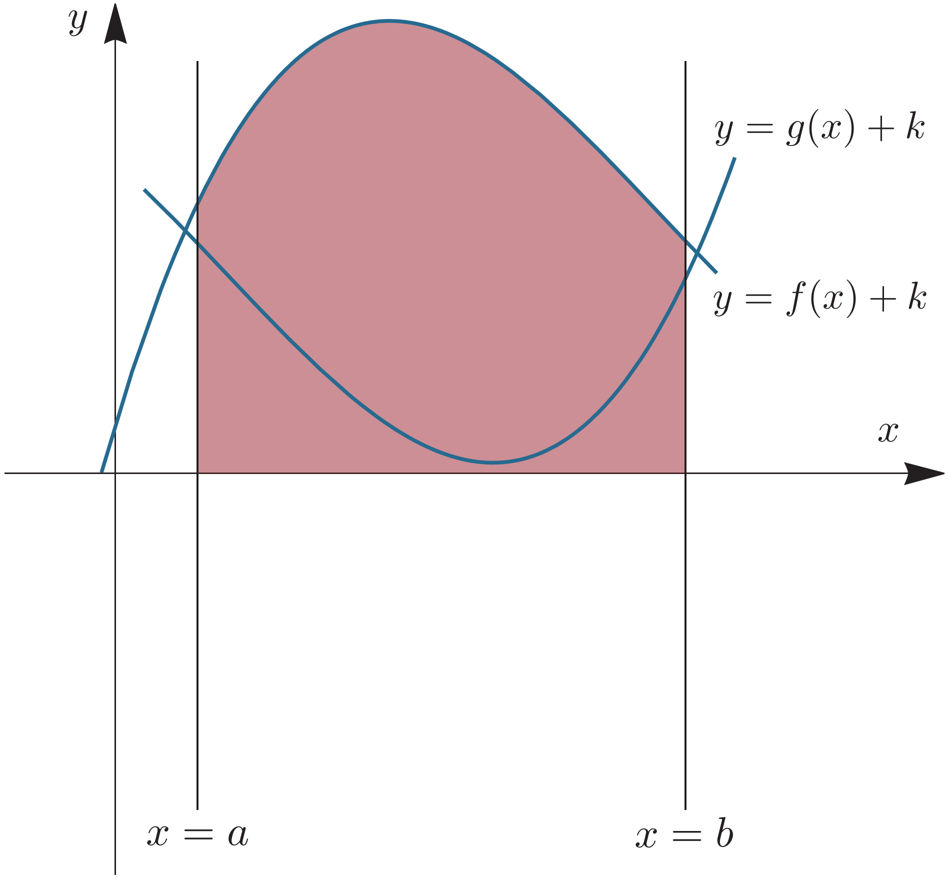
問４）２つの関数 $y = f(x), y = g(x)$ のグラフと，直線 $x = a, x = b$ で囲まれる図形の面積 $S$ を求めなさい．




$a \leq x \leq b$ で $f(x), g(x)$ が非負となるよう上の方（$y$ 軸正の方向）に平行移動する．

# 定積分を利用した面積の計算（４）

問４）２つの関数 $y = f(x), y = g(x)$ のグラフと，直線 $x = a, x = b$ で囲まれる図形の面積 $S$ を求めなさい．



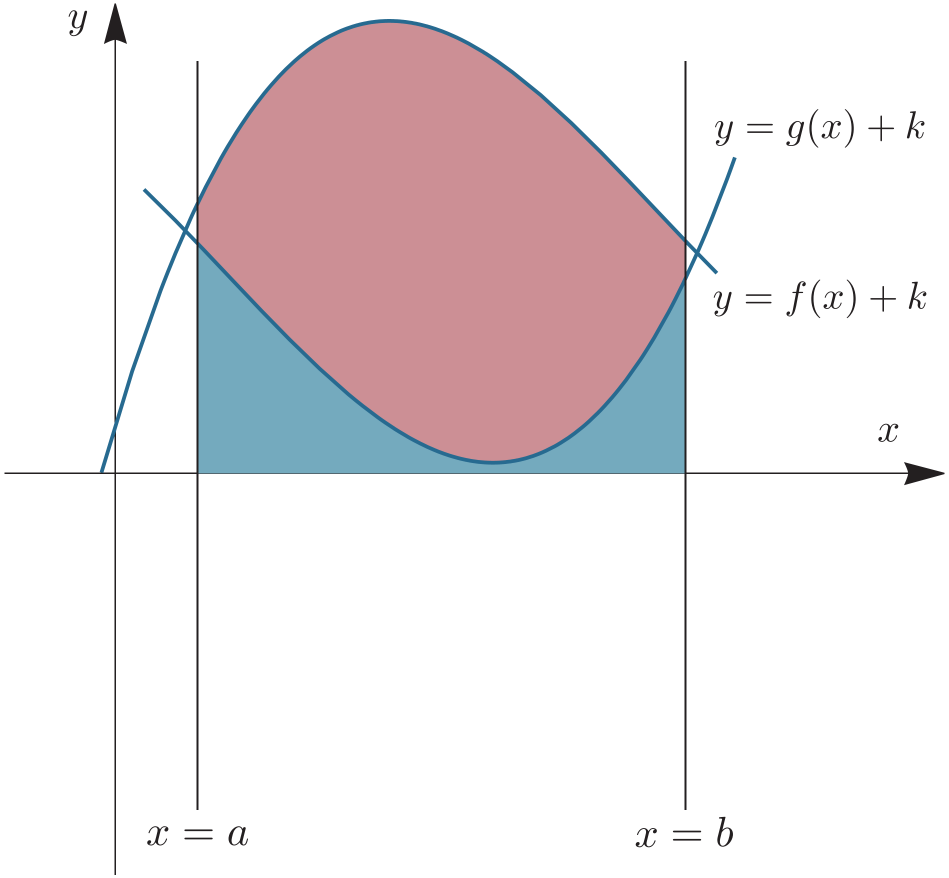

左図の場合は

$$S = \boxed{\int_a^b (f(x) + k)\,dx} - \boxed{\int_a^b (g(x) + k)\,dx}$$

$$= \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

# 定積分を利用した面積の計算（4）

問 4）２つの関数 $y = f(x), y = g(x)$ のグラフと，直線 $x = a, x = b$ で囲まれる図形の面積 $S$ を求めなさい．



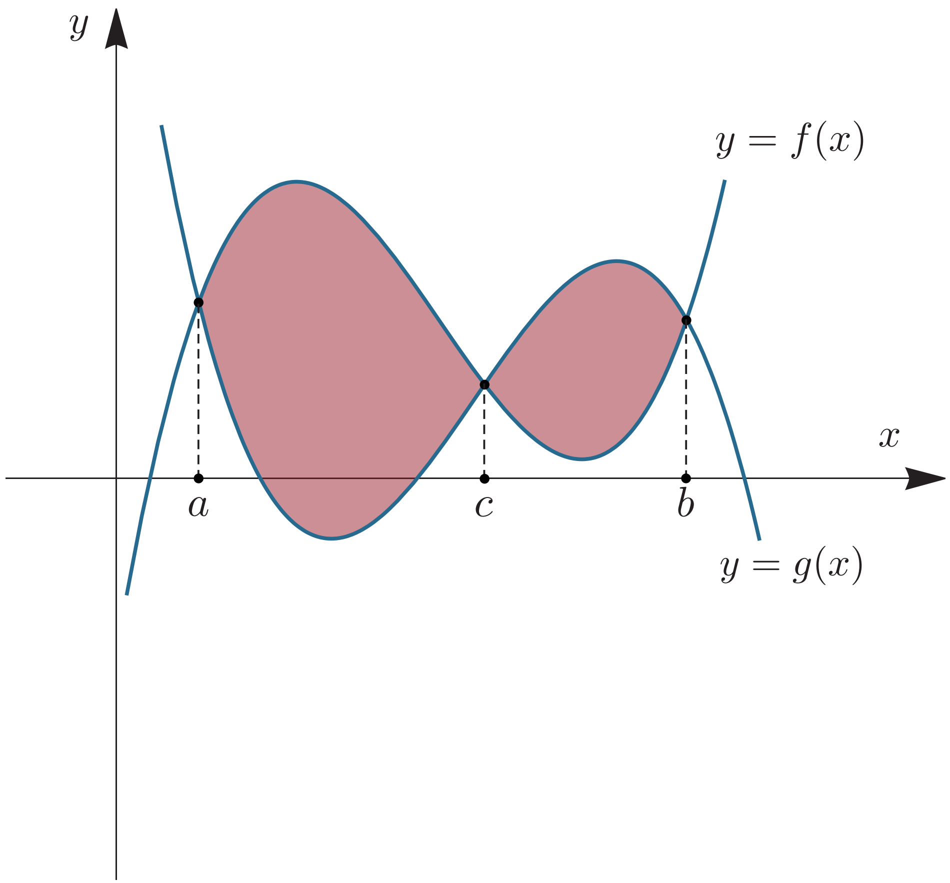

左図の場合は

$$S = \int_a^b (f(x) + k)\,dx - \int_a^b (g(x) + k)\,dx$$

$$= \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

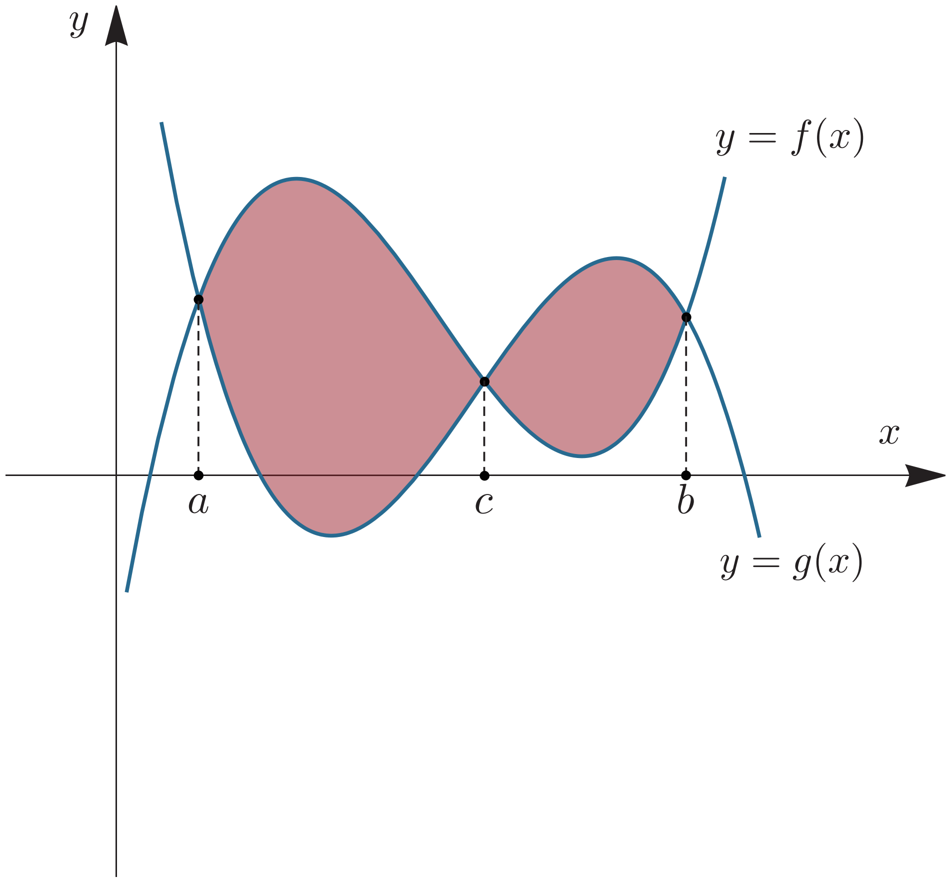
# 定積分を利用した面積の計算（５）

問５）２つの関数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ のグラフで囲まれた図形の面積 $S$ を求めなさい．



# 定積分を利用した面積の計算（５）

問５）２つの関数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ のグラフで囲まれた図形の面積 $S$ を求めなさい．




２つのグラフの交点を求め，これまでの考え方を参考にして，定積分の式として表す．

左図の場合は

$$S = \int_a^c (f(x) - g(x))\,dx + \int_c^b (g(x) - f(x))\,dx$$

# 定積分を利用した面積の計算

一般に，

(1) $y = f(x)$ のグラフと，$x$ 軸，直線 $x = a, x = b$ で囲まれる図形の面積 $S$ は，

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

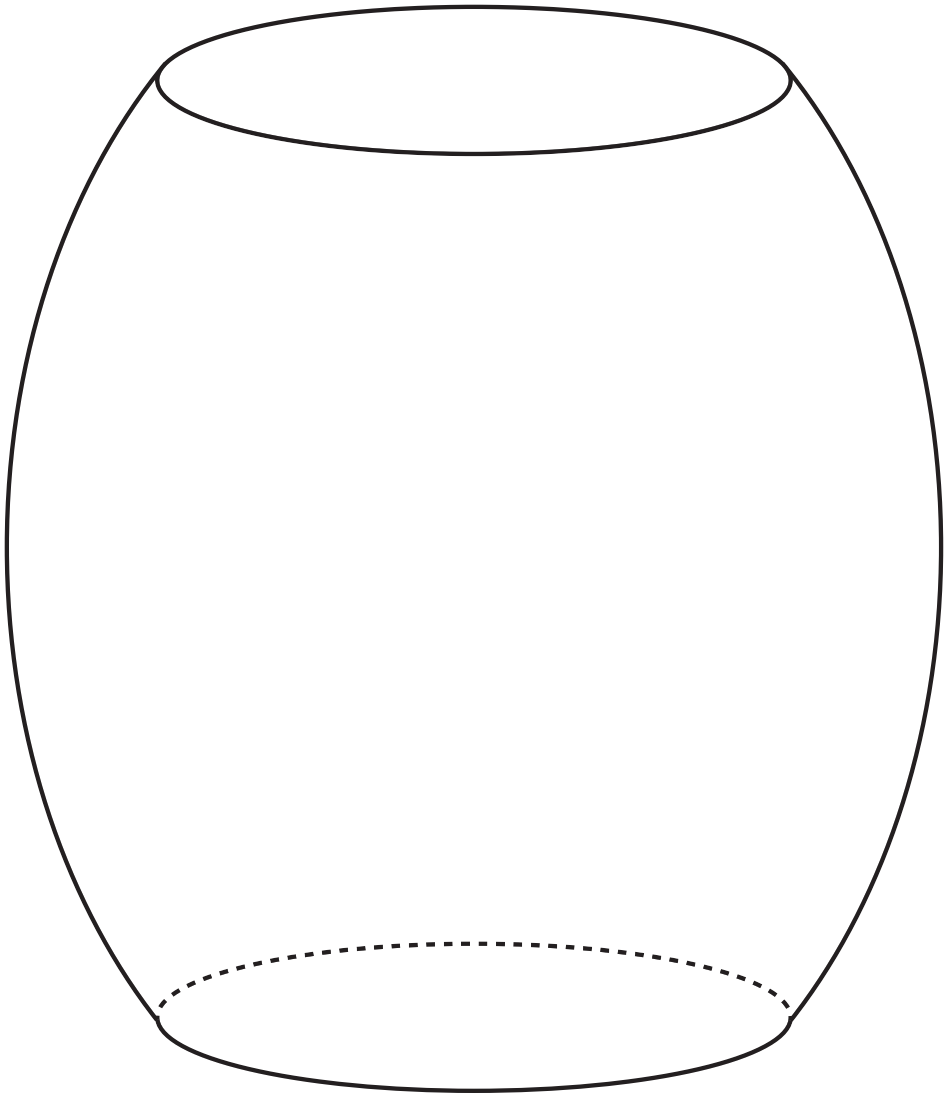
(2) ２つの関数 $y = f(x), y = g(x)$ のグラフと，直線 $x = a, x = b$ で囲まれる図形の面積 $S$ は，

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

※ (1) は (2) において，$g(x) = 0$（$x$ 軸）とした場合である．

# 定積分を利用した回転体の体積の計算

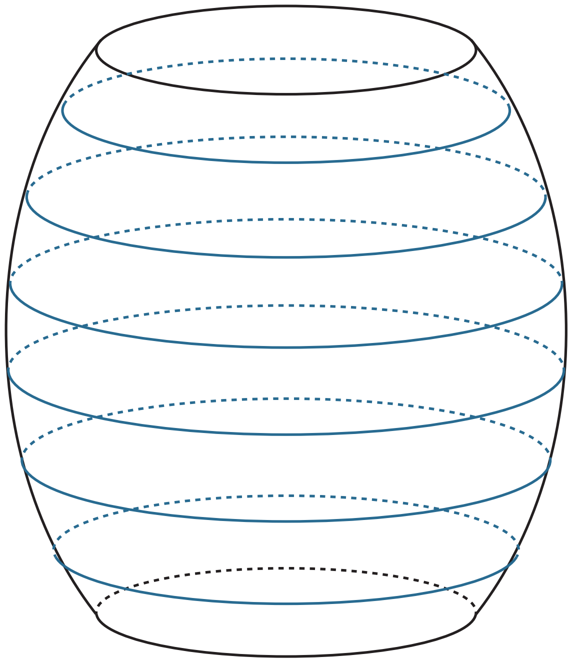
例）樽型の立体の体積

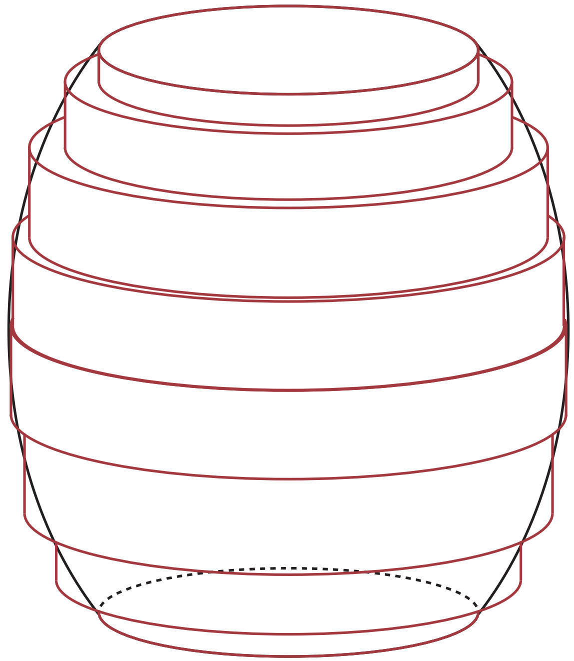


# 定積分を利用した回転体の体積の計算

例）樽型の立体の体積

- 適当に 樽の周囲 の長さ $\ell_i$ を測る（断面の円の半径 $r_i$ がわかる）.
- 樽を左図のような 円柱の集まり として体積 $\sum \pi r_i^2 \cdot h_i$ を計算する.
- これは定積分のおけるリーマン和である.
- 積分する関数は樽の 断面積 .





# 定積分を利用した回転体の体積の計算

- 関数 $y = f(x)$ のグラフの $a \leq x \leq b$ の部分を, $x$ 軸を回転軸として回転してできる立体の体積 $V$ は

$$V = \int_a^b \pi\{f(x)\}^2\,dx$$

となる.