数学クォータ科目「基礎数学 II」第２回

微分の計算（１）

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

先週のまとめ（１）

関数 $y = f(x)$ がある．

- $x = a$ から $x = b\ (= a + h)$ までの平均変化率

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

$\leftarrow$ ２点 $(a, f(a)), (b, f(b))$ を通る直線の傾き

- $x = a$ における微分係数

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}}$$

$\leftarrow$ 点 $(a, f(a))$ における接線の傾き

- 導関数 $\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}}$

先週のまとめ（２）

- **微分の性質** 関数 $f(x), g(x)$ と定数 k に対し，

(1-1) $\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(t)$

(1-2) $\{k\, f(x)\}' = k\, f'(x)$

- **基本的な関数の微分（１）**

(2-1) $(k)' = 0$（すなわち，定数関数の微分は消える）

(2-2) $(x^n)' = n\, x^{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$

今週のこと

- 基本的な関数の微分（２）

(2-2)′ $(x^{\alpha})' = \alpha\, x^{\alpha-1}$ (α は実数)

- 微分公式（１）

(3-1) **合成関数の微分** (I)：$\{f(ax+b)\}' = a\, f'(ax+b)$

(3-2) **積の微分公式**：$\{f(x)\cdot g(x)\}' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

(3-3) **商の微分公式**：$\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$

$(x^{\alpha})' = \alpha\, x^{\alpha-1}$ について

例１） $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $(= x^{-1})$ を微分しなさい．

（解）

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{x}{(x+h)x} - \frac{x+h}{(x+h)x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{x-(x+h)}{(x+h)x}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{(x+h)x} = \lim_{h\to 0} \cdot \frac{-1}{(x+h)x}$$

$$= \frac{-1}{(x+0)x} = \boxed{-\frac{1}{x^2}} \left(= (-1)x^{-2}\right)$$

$(x^{\alpha})' = \alpha\, x^{\alpha-1}$ について

例２） $f(x) = \sqrt{x}\ (= x^{\frac{1}{2}})$ を微分しなさい．

（解）

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\ \left(= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$\{f(ax+b)\}'$ について

問題 $F(x) = f(ax+b)$ の導関数 $F'(x) = \{f(ax+b)\}'$ を求めなさい．

（解）

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a(x+h)+b) - f(ax+b)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(ax+b + ah) - f(ax+b)}{ah} \cdot a$$

$$= \lim_{H\to 0} \frac{f(X+H) - f(X)}{H} \cdot a$$

$$= f'(X) \cdot a$$

$$= \boxed{f'(ax+b) \cdot a}$$

「積の微分の公式」の計算例

(3-2) **積の微分公式：** $\{f(x)\cdot g(x)\}' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

例３） $f(x) = x^2\sqrt{x}$ を微分しなさい．

（解）

$$f'(x) = \left(x^2\sqrt{x}\right)' = \left(x^2\right)'\sqrt{x} + x^2\left(\sqrt{x}\right)'$$

$$= 2x\sqrt{x} + x^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x} + \frac{x\sqrt{x}}{2} = \frac{5x\sqrt{x}}{2}$$

（別解） $f(x) = x^2\cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{2+\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{2}}$ より

$$f'(x) = \left(x^{\frac{5}{2}}\right)' = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{5}{2}x^{1+\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}x^1\cdot x^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}x\sqrt{x}$$

「商の微分の公式」の計算例

(3-3) 商の微分公式： $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$

例４） $f(x) = \dfrac{1}{2x-3}$ を微分しなさい．

（解）

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2x-3}\right)' = -\frac{(2x-3)'}{(2x-3)^2}$$

$$= -\frac{2}{(2x-3)^2}$$

（別解） $g(t) = \dfrac{1}{t}$ に対し，$f(x) = g(2x-3)$ と書ける． $g'(t) = -\dfrac{1}{t^2}$ より

$$f'(x) = g'(2x-3)\cdot 2 = -\frac{2}{(2x-3)^2}$$

x^{-n} の微分（n は自然数）

問題 「商の微分の公式」を利用して，$f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ を微分しなさい．

（解）

$$f'(x) = (x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2}$$

$$= -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = (-n)x^{(n-1)-2n} = \underline{(-n)x^{-n-1}}.$$

- 以上のことから，任意の整数 m に対して，

$$(x^m)' = mx^{m-1}$$

が成り立つことがわかる．

「積の微分の公式」から「商の微分の公式」を導く

問題 $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ の導関数を求めなさい．

（解） $f(x) = g(x)\,F(x)$ と式変形し，両辺を微分すると

$$
\begin{aligned}
f'(x) = \{g(x)\,F(x)\}' &= g'(x)\,F(x) + g(x)\,F'(x) \\
&= g'(x)\,\frac{f(x)}{g(x)} + g(x)\,F'(x)
\end{aligned}
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{1}{g(x)}\left(f'(x) - g'(x)\,\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{1}{g(x)}\left(\frac{f'(x)\,g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)\,g'(x)}{g(x)}\right) \\
&= \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)} = \boxed{\frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}}
\end{aligned}
$$