数学クォータ科目「基礎数学 II」第 1 回

微分係数と導関数

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

今回，理解すること

(1) 関数の概念（※関数を表す 記号 $f(x)$ の使い方）.

(2) 関数 $y = f(x)$ のグラフとは何か（※平面の直交座標系）.

(3) 関数 $f(x)$ の $x = a$ から $x = b$ までの平均変化率.

(4) 関数 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数.

(5) 関数 $f(x)$ の導関数.

(1) 関数について

- ２つの変数 x, y がある.
  - 変数とは, いろいろな値をとる文字のこと.
  - 一方, 固定された値をとる文字のことを定数という.
- 変数 x の値を決めると, それに応じて y の値が決まるとき,

  「y は x の 関数 である」

  という.
- このとき, $\begin{cases} x & \text{を独立変数} \\ y & \text{を従属変数} \end{cases}$ という.
- 変数 y が独立変数 x の関数であることを, 一般的に $y = f(x)$ と書く.
  - f は「x に対して, $y(= f(x))$ を対応させる規則」と解釈できる.
  - 「x の関数」とは「x で記述される式 $f(x)$」と考えてよい.

(1) 関数について（関数の例）

- 多項式関数
  - ２次関数 $y = ax^2 + bx + c$
  - １次関数 $y = ax + b$

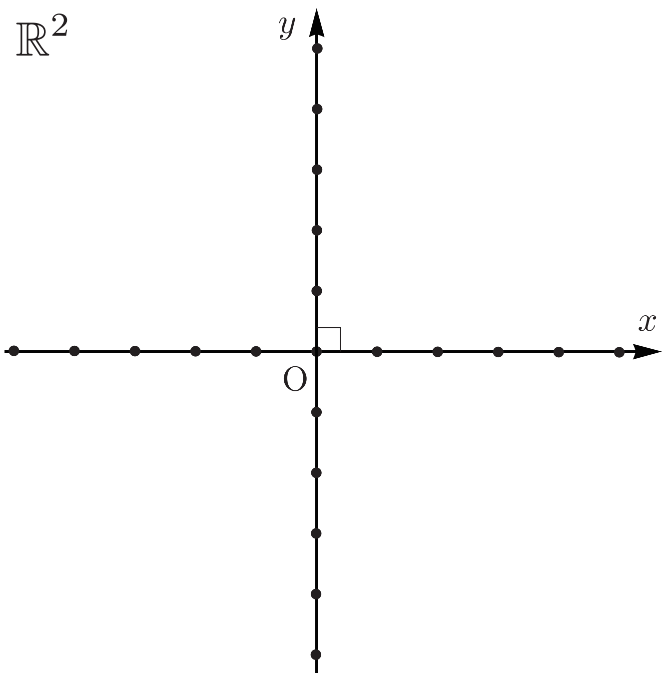
    $\vdots$
  - n 次関数 $y = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$
- 冪関数：$y = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$, $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ など
- 有理関数：$y = \dfrac{1}{x}$, $y = \dfrac{x}{2x^2+1}$ など $y = \dfrac{(\text{多項式関数})}{(\text{多項式関数})}$ と書ける関数.
- 指数関数 $y = a^x$
- 対数関数 $y = \log_a x$
- 三角関数 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$

※ 上記の関数とその 合成関数 を 初等関数 という.

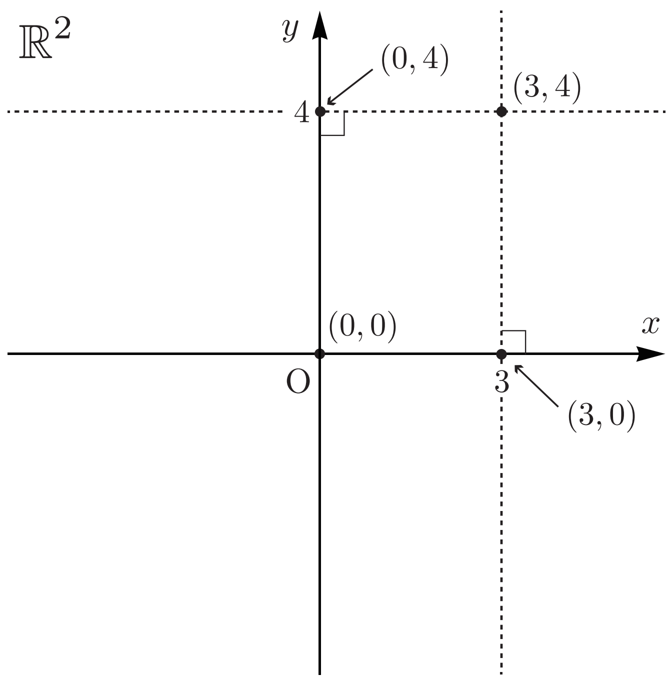
(2) 関数のグラフについて（座標平面）

- 関数 $y = f(x)$ があるとき, $x = \alpha$ に対して
  - 数 $y = f(\alpha)$ が定まる.
  - 数の組 $(\alpha, f(\alpha))$ が定まると考えてもよい. ← 点の座標を表す.
- 平面の点の 座標 とは，平面の点の位置を２つの数の組として表したもののこと.

平面の直交座標系

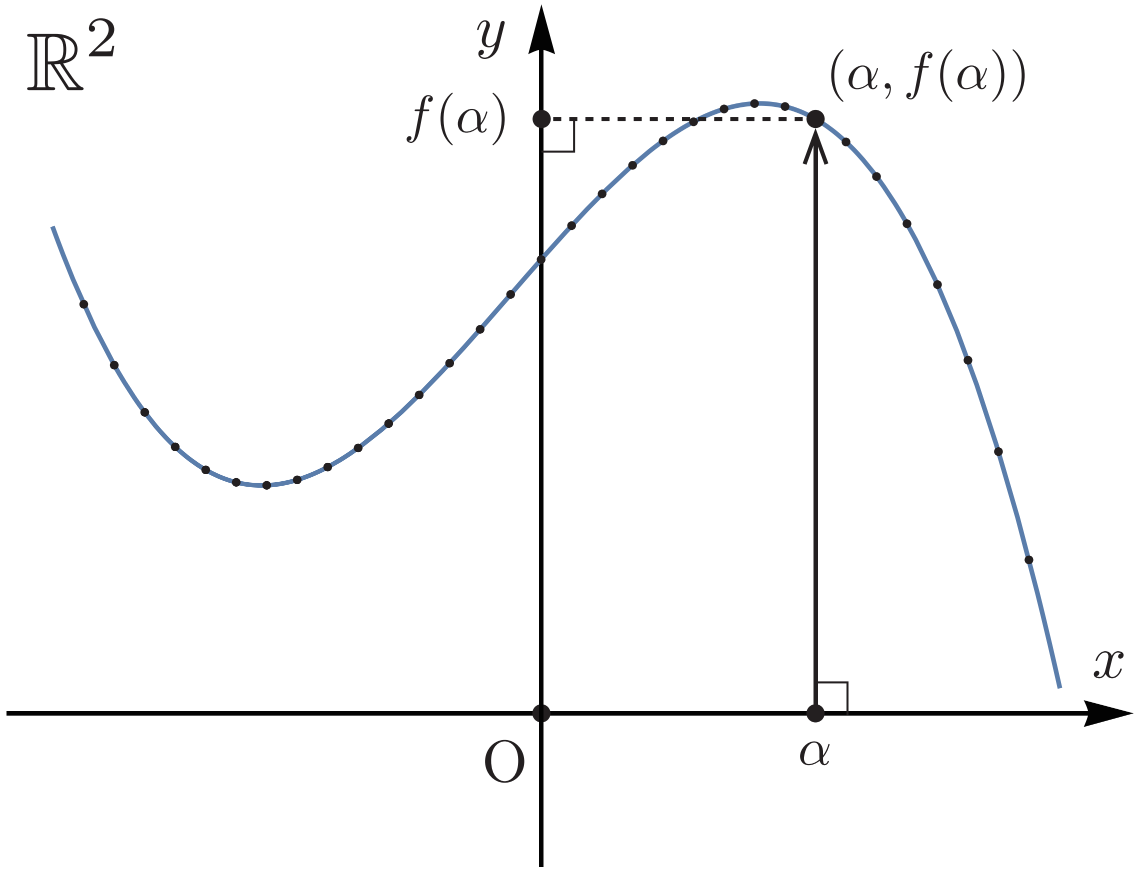


例）座標 $(3, 4)$ の点



(2) 関数のグラフについて

- 関数 $y = f(x)$ があるとき，$x = \alpha$ を与えると, 平面の点 $(\alpha, f(\alpha))$ が定まる. このような点の全体は, 平面内の曲線をなす.



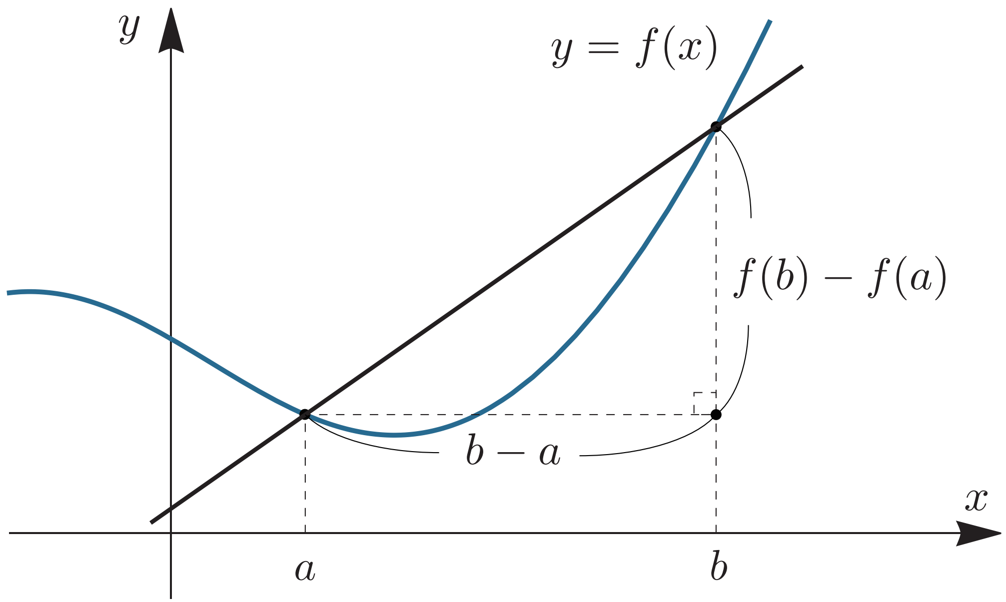
- この曲線を「関数 $y = f(x)$ の グラフ 」という.

(3) 平均変化率

- 関数 $f(x)$ がある．
- 関数 $f(x)$ の定義域内の２点 $x = a, b$ $(a < b)$ をとる．
- このとき，$x = a$ から $x = b$ $(= a + h)$ までの平均変化率を以下で定義．

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

→ ２点 $(a, f(a)), (b, f(b))$ を通る直線の傾きである．

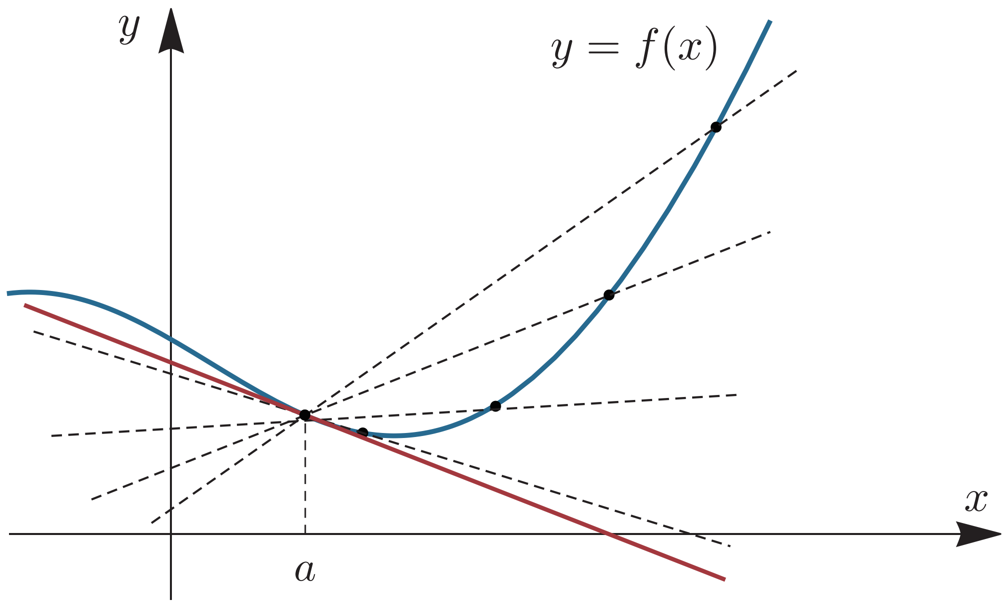


(4) 微分係数

- 関数 $f(x)$ がある．
- 関数 $f(x)$ の定義域内の点 $x = a$ をとる．
- このとき，$x = a$ における微分係数を以下で定義．

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

→ ２点 $(a, f(a)), (b, f(b))$ を通る直線の「極限」である直線を点 $(a, f(a))$ における接線という．微分係数は接線の傾きである．



(5) 導関数：定義

- $x = a$ に対し微分係数 $f'(a)$ を対応させる関数を，$f(x)$ の導関数という．つまり，

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- $f(x)$ の導関数を求めることを「関数 $f(x)$ を微分する」という．

- 関数 $y = f(x)$ の導関数を次のような記号で表す．

$$f'(x), \quad y', \quad \frac{df}{dx}(x), \quad \frac{dy}{dx}$$

(5) 導関数：微分の性質

- 微分の性質 関数 $f(x), g(x)$ と定数 k に対し，

(1-1) $\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(t)$

(1-2) $\{k\, f(x)\}' = k\, f'(x)$

- 基本的な関数の微分（１）

(2-1) $(k)' = 0$（すなわち，定数関数の微分は消える）

(2-2) $(x^n)' = n\, x^{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$