数学クォータ科目「応用解析」第１回 / ベクトル解析（1）

ベクトル関数の微分と積分

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

【イントロダクション】「応用解析」について

この科目では次の３つのテーマについて学習する．

(1) ベクトル解析

(2) 複素関数論（または, 複素解析）

(3) 微分方程式

- 解析学 ≒ 微分積分学

  つまり，３つとも「微分積分学」と関連．

- 「微分積分学」の考察対象は 関数 . これまで扱った関数は, 実数値関数
  - １変数関数 $y = f(x)$ （「基礎数学 I」「II」または, 高校数学）

    変数 x の値を定めると, 変数 y の値がただひとつ決まる.
  - ２変数関数 $z = f(x, y)$ （「数学」）

    変数 x, y の値を定めると, 変数 z の値がただひとつ決まる.

【イントロダクション】「応用解析」について

この科目では次の関数を扱う．

(1) ベクトル解析

- （１変数）ベクトル関数 ：１変数関数の三つ組
- スカラー場 ：３変数関数
- ベクトル場 ：３変数関数の三つ組
- （２変数）ベクトル関数 ：２変数関数の三つ組

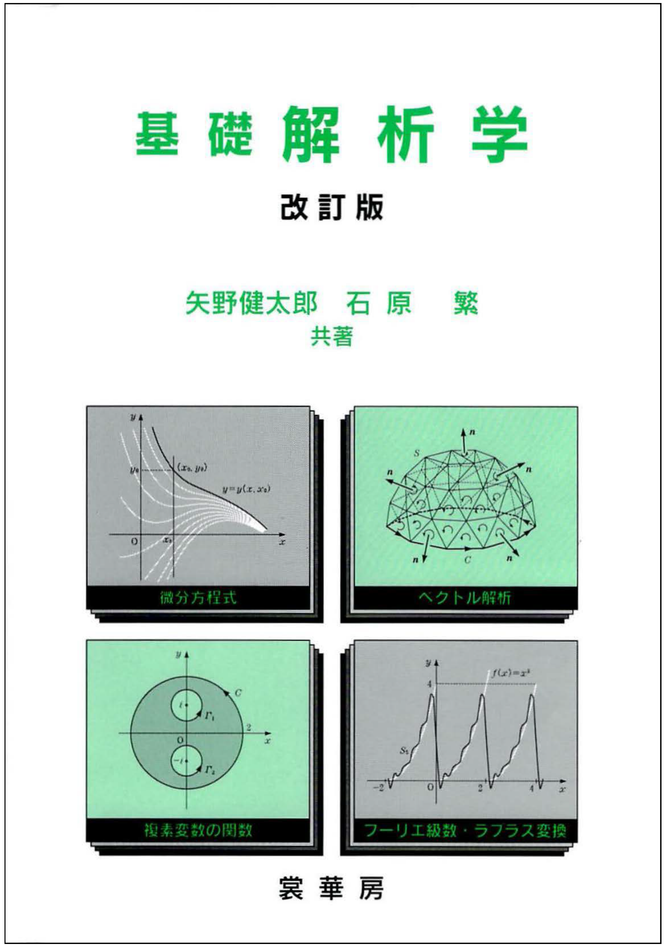
(2) 複素関数論

- 複素関数（複素１変数複素数値関数） ：２変数関数の組

(3) 微分方程式

- １変数関数

「応用解析」の教科書・参考書



第 II 部, 第 III 部, 第 I 部

第４章

今日の授業で理解してほしいこと

- （１変数）ベクトル値関数 の
  - 概念とその幾何学的な解釈
  - 微分の計算と微分の幾何学的な解釈
  - 不定積分と定積分の計算

【復習１】ベクトルとは

- 有向線分 向きをつけた線分のこと（端点に始点と終点の情報を付与）
- ２つの有向線分が平行移動により一致するとき，それらを同じモノとみなす．それを ベクトル とよぶ．

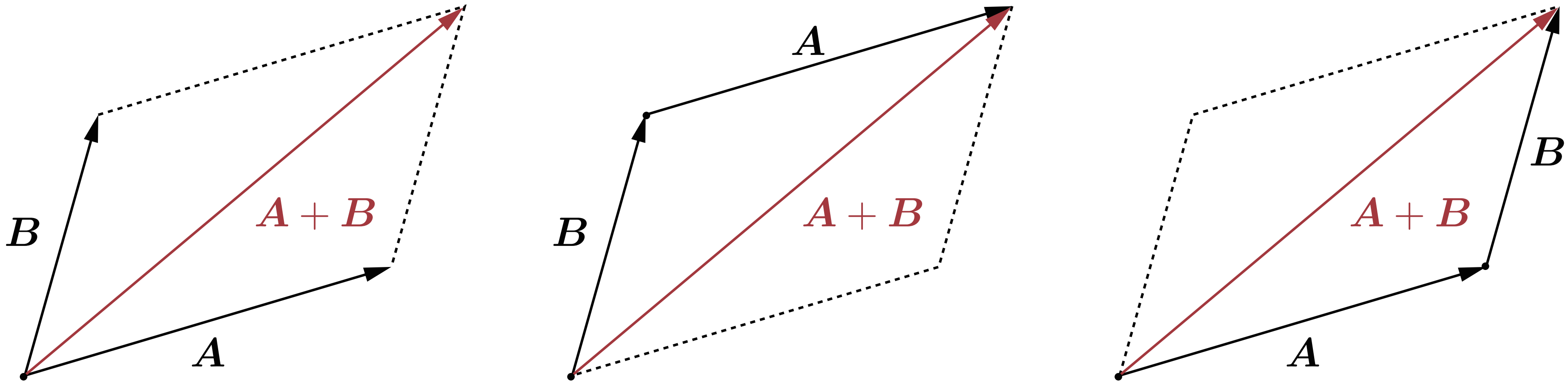
- ベクトル $\boldsymbol{A}$ に対し，$\boldsymbol{A} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となるような点 $\mathrm{A}(l, m, n)$ がひとつ定まる．（始点が原点 O になるように $\boldsymbol{A}$ を平行移動したときの終点が A）
- $\boldsymbol{A} = (l, m, n)$ のように，ベクトル $\boldsymbol{A}$ を A の座標で表すことを，ベクトルの 成分表示という．

- 有向線分としての $\boldsymbol{A}$ の長さ（線分 OA の長さ）のことをベクトル $\boldsymbol{A}$ の大きさといい，$|\boldsymbol{A}|$ と表す．

$$|\boldsymbol{A}| = \mathrm{OA} = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$$

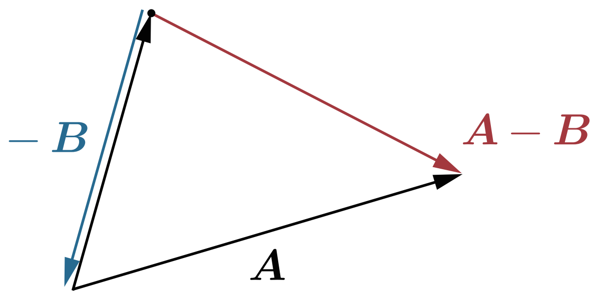
【復習２】ベクトルの線形演算

- 和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$



- スカラー倍 $c\boldsymbol{A}$

- 差 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$



※ ベクトルの成分表示において
ベクトルの和・差・スカラー倍は, 成分毎の和・差・スカラー倍となる.

【復習３】基本ベクトルと基本ベクトル表示

- 以下のベクトルを基本ベクトルという：

$\boldsymbol{i} = (1, 0, 0),\ \boldsymbol{j} = (0, 1, 0),\ \boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$

- ベクトルの線形演算（和とスカラー倍）の性質から, $\boldsymbol{A} = (l, m, n)$ は

$$\boldsymbol{A} = l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k}$$

と表せる. これを 基本ベクトル表示 という.

注意

◦ 以後, ベクトルを表す際は, 基本ベクトル表示を用いる.

◦ 点とベクトルを同一視して扱うことがある：

$$\mathrm{A}(l, m, n) \ \leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (l, m, n) \ \leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{OA}} = l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k}$$

ベクトル関数

定義

変数 t の値を決めると，その値に応じてベクトル $\boldsymbol{A}(t)$ がただ一つ定まるとき, $\boldsymbol{A}(t)$ を独立変数 t のベクトル関数という.

- $\boldsymbol{A}(t)$ はベクトルなので, 基本ベクトル表示が得られる：

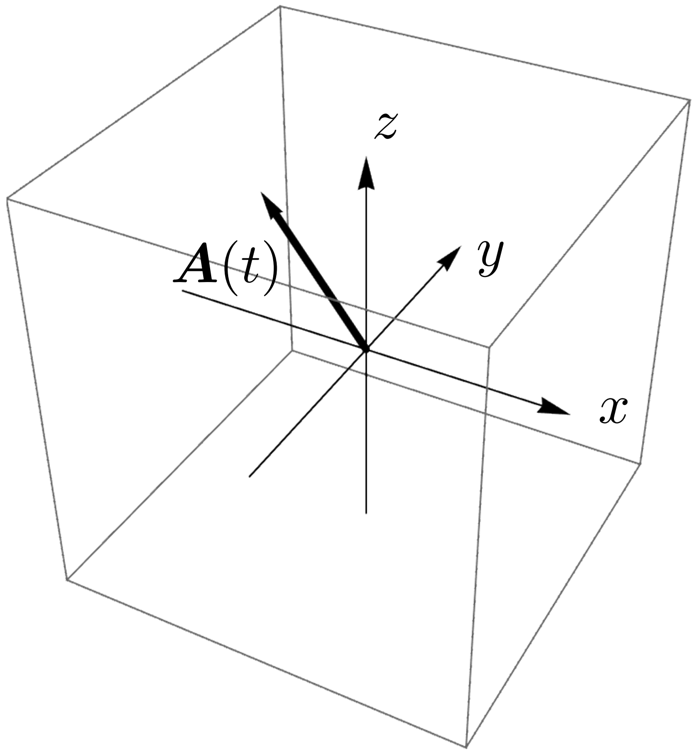
$$\boldsymbol{A}(t) = A_x(t)\,\boldsymbol{i} + A_y(t)\,\boldsymbol{j} + A_z(t)\,\boldsymbol{k}$$

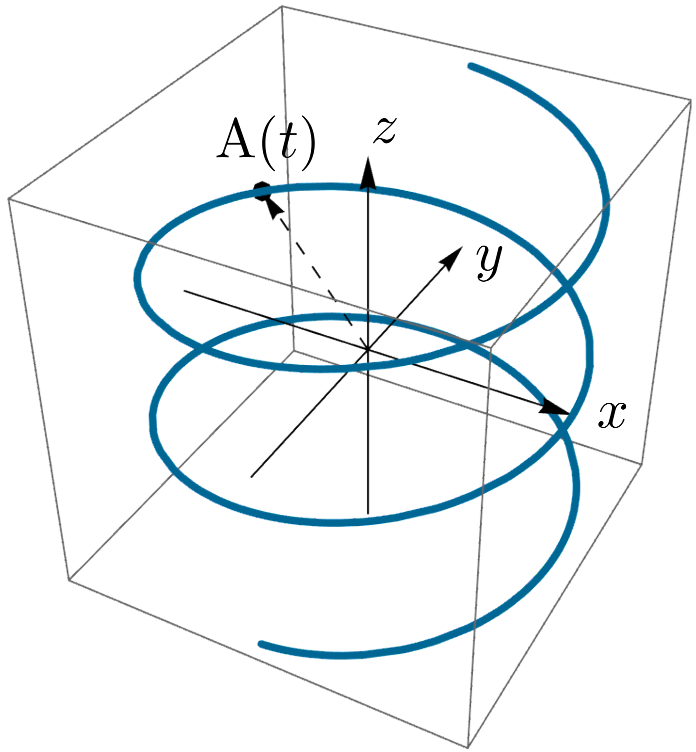
- つまり, ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(t)$ を考えることは,
３つの１変数関数の組 $A_x(t), A_y(t), A_z(t)$ を考えることと同じである.

- $A_x(t), A_y(t), A_z(t)$ のことをベクトル関数 $\boldsymbol{A}(t)$ の成分とよぶ.

ベクトル関数

例１）$\boldsymbol{A}(t) = a\cos t\,\boldsymbol{i} + a\sin t\,\boldsymbol{j} + bt\,\boldsymbol{k}$（$a, b$ は定数）





- ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(t)$ の始点を原点 O に固定すると, $\boldsymbol{A}(t)$ の終点 $\mathrm{A}(t)$ は, 一般に１つの曲線を描く. この曲線を $\boldsymbol{A}(t)$ の ホドグラフ という.

ベクトル関数

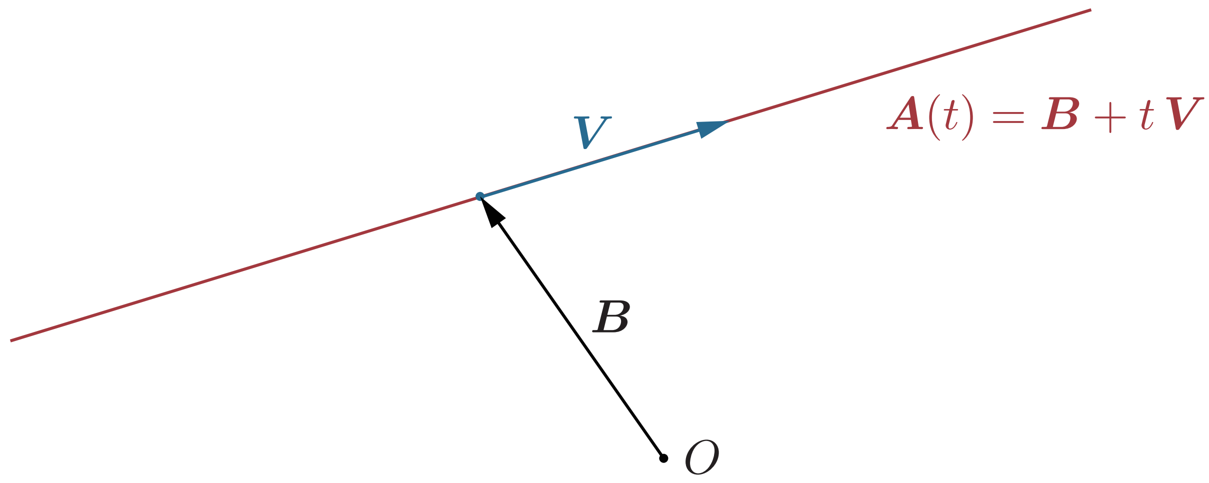
例２） 成分が独立変数 t の１次関数のベクトル関数：

$$\boldsymbol{A}(t) = (b_1 + v_1 t)\,\boldsymbol{i} + (b_2 + v_2 t)\,\boldsymbol{j} + (b_3 + v_3 t)\,\boldsymbol{k}$$

- これは

$$\boldsymbol{A}(t) = (b_1\,\boldsymbol{i} + b_2\,\boldsymbol{j} + b_3\,\boldsymbol{k}) + t\,(v_1\,\boldsymbol{i} + v_2\,\boldsymbol{j} + v_3\,\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{B} + t\,\boldsymbol{V}$$

と書ける．ただし，$\boldsymbol{B} = b_1\,\boldsymbol{i} + b_2\,\boldsymbol{j} + b_3\,\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{V} = v_1\,\boldsymbol{i} + v_2\,\boldsymbol{j} + v_3\,\boldsymbol{k}$．



ベクトル関数の微分（導関数）

定義

ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(t) = A_x(t)\,\boldsymbol{i} + A_y(t)\,\boldsymbol{j} + A_z(t)\,\boldsymbol{k}$ に対し,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\boldsymbol{A}(t+h) - \boldsymbol{A}(t)\right)$$

を $\boldsymbol{A}(t)$ の**微分**または**導関数**とよび, $\boldsymbol{A}'(t)$ や $\dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt}(t)$ と表す.

計算方法 各成分を微分すればよい.

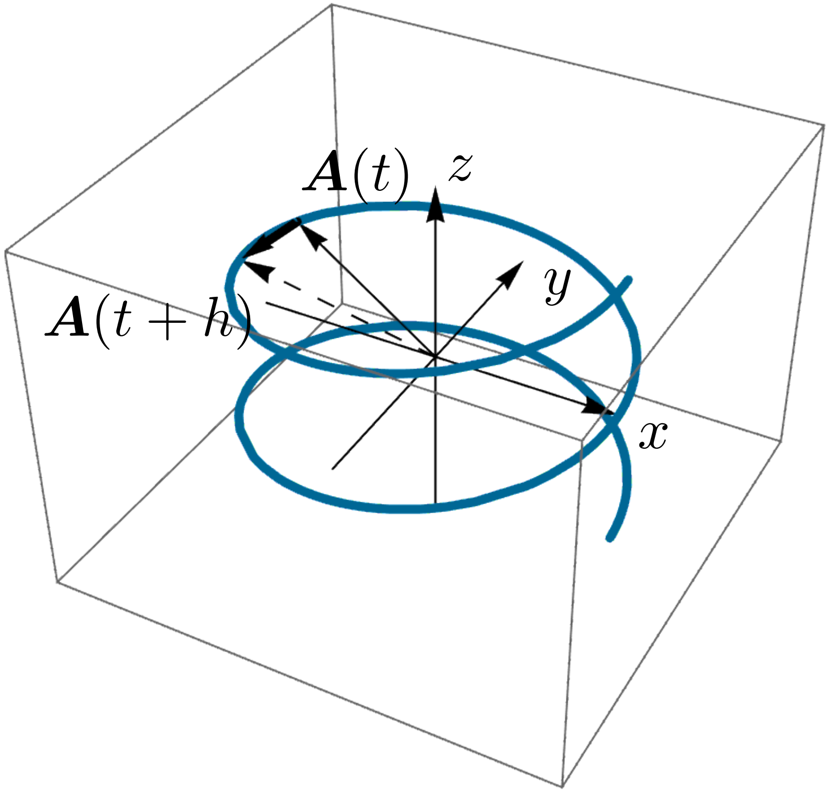
$$\frac{\boldsymbol{A}(t+h) - \boldsymbol{A}(t)}{h} = \frac{A_x(t+h) - A_x(t)}{h}\,\boldsymbol{i} + \frac{A_y(t+h) - A_y(t)}{h}\,\boldsymbol{j} + \frac{A_z(t+h) - A_z(t)}{h}\,\boldsymbol{k}$$

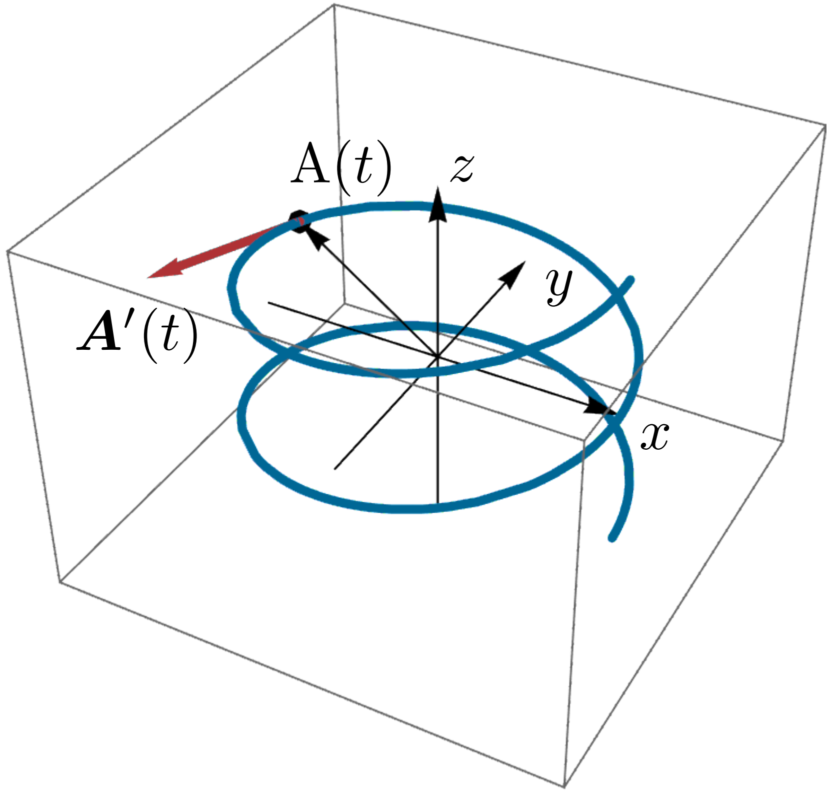
$$\xrightarrow{h\to 0} A_x'(t)\,\boldsymbol{i} + A_y'(t)\,\boldsymbol{j} + A_z'(t)\,\boldsymbol{k}$$

ベクトル関数の微分の幾何学的な解釈

- ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(t)$ の始点を原点としたときの終点を $\mathrm{A}(t)$ とする.
- 導関数 $\boldsymbol{A}'(t)$ の始点を $\mathrm{A}(t)$ であるベクトルとすると,

  $\boldsymbol{A}'(t)$ は $\boldsymbol{A}(t)$ のホドグラフに接するベクトルである.





ベクトル関数の積分

$\boldsymbol{A}(t) = A_x(t)\,\boldsymbol{i} + A_y(t)\,\boldsymbol{j} + A_z(t)\,\boldsymbol{k}$ をベクトル関数とする.

- $\boldsymbol{D}(t)$ の導関数が $\boldsymbol{A}(t)$ であるとき, $\boldsymbol{D}(t)$ を $\boldsymbol{A}(t)$ の不定積分といい, 次のような記号で表す；

$$\boldsymbol{D}(t) = \int \boldsymbol{A}(t)\,dt$$

- 実際の計算は $\displaystyle\int \boldsymbol{A}(t)\,dt = \int A_x(t)\,dt\,\boldsymbol{i} + \int A_y(t)\,dt\,\boldsymbol{j} + \int A_z(t)\,dt\,\boldsymbol{k}$

- $\boldsymbol{A}(t)$ の定義域内の区間 $a \leq t \leq b$ に対して, １変数関数の場合と同様にしてリーマン和の極限として, 定積分 $\displaystyle\int_a^b \boldsymbol{A}(t)\,dt$ が定義できる.

- 実際の計算は $\displaystyle\int_a^b \boldsymbol{A}(t)\,dt = \int_a^b A_x(t)\,dt\,\boldsymbol{i} + \int_a^b A_y(t)\,dt\,\boldsymbol{j} + \int_a^b A_z(t)\,dt\,\boldsymbol{k}$

まとめと復習（と予習）

- ベクトル関数とは何ですか？
  - ベクトル関数のホドグラフとは何ですか？
  - ベクトル関数の微分（導関数）の計算方法は？
  - ベクトル関数の微分（導関数）はどのようなベクトルですか？
  - ベクトル関数の不定積分の計算方法は？
  - ベクトル関数の定積分の計算方法は？

教科書 p.73〜77

問題集 187, 188, 189

予 習 ベクトルの内積「基礎数学Ⅰ」, 合成関数の微分「数学」