数学クォータ科目「数学」第 7 回 (2/2)

行列の対角化

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

【復習】固有値と固有ベクトル

- 正方行列 A に対し, 等式 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ を満たす
  - スカラー λ を「A の固有値」といい,
  - ベクトル $\boldsymbol{x}$ $(\neq \mathbf{0})$ を「A の固有値 λ に対する固有ベクトル」という.
- 求め方
  - 固有値は, 固有方程式 $|A - \lambda E| = 0$ の解 λ.
  - 固有ベクトルは, 連立１次方程式 $(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解 $\boldsymbol{x}$.
- 今回のテーマは, 行列の対角化

「行列の対角化」とは？

例） $A = \dfrac{1}{24}\begin{pmatrix} 31 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 21 \end{pmatrix}$ の固有値は $\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{2}$ であり, 対応する固有ベクトル

はそれぞれ $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ であった.

問　２つの固有ベクトルを並べて正方行列 $P = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ をつくる.

このとき, ３つの行列の積 $P^{-1}AP$ を計算しなさい.

解）

$$P^{-1}AP = \frac{1}{-1-3}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\left\{\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 31 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 21 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4\cdot 24}\begin{pmatrix} 16 & -16\sqrt{3} \\ -36\sqrt{3} & -36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}$$

「行列の対角化」とは？

例） $A = \dfrac{1}{24}\begin{pmatrix} 31 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 21 \end{pmatrix}$ の固有値は $\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{2}$ であり，対応する固有ベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ であった．

問 ２つの固有ベクトルを並べて正方行列 $P = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ をつくる．

このとき，３つの行列の積 $P^{-1}AP$ を計算しなさい．

解）

$$\therefore\ P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

← 対角行列になった

「行列の対角化」とは？

例） $A = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 31 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 21 \end{pmatrix}$ の固有値は $\frac{2}{3}, \frac{3}{2}$ であり，対応する固有ベクトル

はそれぞれ $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ であった．

問 ２つの固有ベクトルを並べて正方行列 $P = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ をつくる．

このとき，３つの行列の積 $P^{-1}AP$ を計算しなさい．

別解） $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}$ とおくと

$$AP = A\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x}_1 & A\boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\boldsymbol{x}_1 & \frac{3}{2}\boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

行列の対角化

- 正方行列 A に対し, 適当に正則行列 P を選んで, $P^{-1}AP$ を対角行列にすることを **行列の対角化** という.
- 正方行列 A が正則行列 $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}$ によって,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と対角化されるならば,

  - $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ はすべて A の固有値で,
  - $\boldsymbol{x}_i$ は, 固有値 λ_i に対応する固有ベクトルである.

(前のページと同様の議論より, この事実が導かれる)

行列の対角化の考え方

- 行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ とする.
- 対応する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots$ とする.
- 固有ベクトル達を並べて行列 $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots \end{pmatrix}$ をつくる.
- これらは $\boxed{A\boldsymbol{x}_i = \lambda_i \boldsymbol{x}_i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ を満たすので,

$$
\begin{aligned}
AP =& A\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x}_1 & A\boldsymbol{x}_2 & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\boldsymbol{x}_1 & \lambda_2\boldsymbol{x}_2 & \cdots \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- P が正則ならば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$ と対角行列になる.

行列を対角化する手順

- 正方行列 A を対角化するには…

(1) A の固有値・固有ベクトルを求める.

(2) 固有ベクトルを並べて正則行列 $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots \end{pmatrix}$ をつくる.

(3) $P^{-1}AP$ は, A の固有値を対角成分とする対角行列となる.

(対角成分の並び順は, P の固有ベクトルの並び順と対応)

- 上記のようにして, 行列 A が対角化できるとき, 「A は 対角化可能 である」という.

行列の対角化に関する注意

- すべての正方行列が対角化可能であるとは限らない.

  例）対角化可能でない行列の例

  - 回転行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
  - せん断 $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- 任意の 対称行列 （${}^tA = A$ を満たす行列）は対角化可能である.

定理.

任意の 対称行列 は, 直交行列 で対角化可能である. つまり, 行列 A が対称行列ならば, ${}^tPP = E$ かつ ${}^tPAP$ が対角行列となるような正則行列 P が存在する.

対称行列の対角化の例

例）$A = \dfrac{1}{24}\begin{pmatrix} 31 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 21 \end{pmatrix}$ の固有値は $\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{2}$ であり, 対応する固有ベクトル

はそれぞれ $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ であった.

- $P = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ とおくと, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ となる.

  （このスライドの p.2 を参照）

- $Q = \dfrac{1}{2}P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ とおくと, Q は 直交行列 で,

  $${}^tQAQ = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$ が成り立つ.

行列の対角化の応用

(1) **固有値と行列式の関係** 正方行列 A が対角化可能であるとき, A の行列式の値は, n 個の固有値の積に等しい.

$\because$) A が正則行列 P で対角化されたとする. つまり,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- 対角行列は三角行列なので, 行列式の値は対角成分の積に等しい.
- 行列式の［性質 7］より,

$$|P^{-1}AP| = |P^{-1}|\,|A|\,|P| = |P^{-1}|\,|P|\,|A| = |P^{-1}P|\,|A| = |E|\,|A| = |A|.$$

- 以上のことより, $|A| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ を得る.

行列の対角化の応用

(2) **正方行列の m 乗の計算**

○ $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ のとき, 両辺の m 乗（m 個の行列の積）をとると,

$$
\begin{aligned}
(P^{-1}AP)^m &= \underbrace{(P^{-1}AP) \times (P^{-1}AP) \times \cdots \times (P^{-1}AP)}_{m \text{ 個}} \\
&= P^{-1}A(PP^{-1}) \cdots (PP^{-1})AP = P^{-1}AE \cdots EAP \\
&= P^{-1} \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{m \text{ 個}} P = P^{-1}A^m P,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} \alpha^m & 0 \\ 0 & \beta^m \end{pmatrix}.
$$

○ よって, $\boxed{A^m = P \begin{pmatrix} \alpha^m & 0 \\ 0 & \beta^m \end{pmatrix} P^{-1}}$ である.

行列の対角化の応用

(3) **２次形式の標準化**

- ２次形式 $ax^2+2bxy+cy^2$ は行列の積を用いて, 次のように書ける;

$$ax^2+2bxy+cy^2=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- 行列 A は **対称行列** なので, **直交行列** Q を用いて対角化できる;

$${}^tQAQ=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

- このとき,

$$ax^2+2bxy+cy^2=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}Q\,\boxed{{}^tQAQ}\,{}^tQ\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\alpha X^2+\beta Y^2$$

行列の対角化の応用

(4) **２変数関数 $f(x,y)$ の極値の判定** $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ を満たす点 (a,b) に対し, $\underline{D(a,b)\text{ の符号}}$で, $f(a,b)$ が極値か否かを判定した.

- $F(t) = f(a+ht, b+kt)$ をおくとき, $\underline{F''(0)\text{ の符号}}$が本質的である.

$$
\begin{aligned}
F''(0) &= f_{xx}(a,b)\,h^2 + 2f_{xy}(a,b)\,hk + f_{yy}(a,b)\,k^2 \\
&= \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \boxed{\begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} H & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix} = \alpha H^2 + \beta K^2.
\end{aligned}
$$

- よって, $f(x,y)$ のヘッセ行列の固有値 α, β が,
  - どちらも負ならば, $f(a,b)$ は極大値である.
  - どちらも正ならば, $f(a,b)$ は極小値である.
  - 符号が異なるとき, $f(a,b)$ は極値ではない.

今回（第７回講義）のまとめ

(1)

- 固有値・固有ベクトルの定義 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$
- 固有値・固有ベクトルの求め方
- 固有方程式 $|A - \lambda E| = 0$

(2)

- 行列の対角化
- $P^{-1}AP$ が対角行列になる場合,
  - その 対角成分 は A の固有値であること.
  - 正則行列 P の 列 は A の固有ベクトルであること.