数学クォータ科目「数学」第 7 回 (1/2)

行列の固有値と固有ベクトル

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

固有値と固有ベクトルの定義

定義

正方行列 A に対し, 等式 $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ を満たす

- スカラー λ を「A の**固有値**」といい,
- ベクトル $\boldsymbol{x}$ を「A の固有値 λ に対する**固有ベクトル**」という.

ただし, $\boldsymbol{x}$ は零ベクトルではないとする.

- ２次正方行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルとは,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を満たすスカラー λ とベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のこと.

固有値・固有ベクトルの例

例）$A = \dfrac{1}{24}\begin{pmatrix} 31 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 21 \end{pmatrix}$ の固有値は $\dfrac{2}{3}$ と $\dfrac{3}{2}$ であり,

$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ がそれぞれ対応する固有ベクトルである.

- 実際,

$$A\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 31 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 21 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} -31 + 5 \times 3 \\ -5\sqrt{3} + 21\sqrt{3} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{24}\begin{pmatrix} -16 \\ 16\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{16}{24}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\boldsymbol{x}_1.$$

- 同様に,

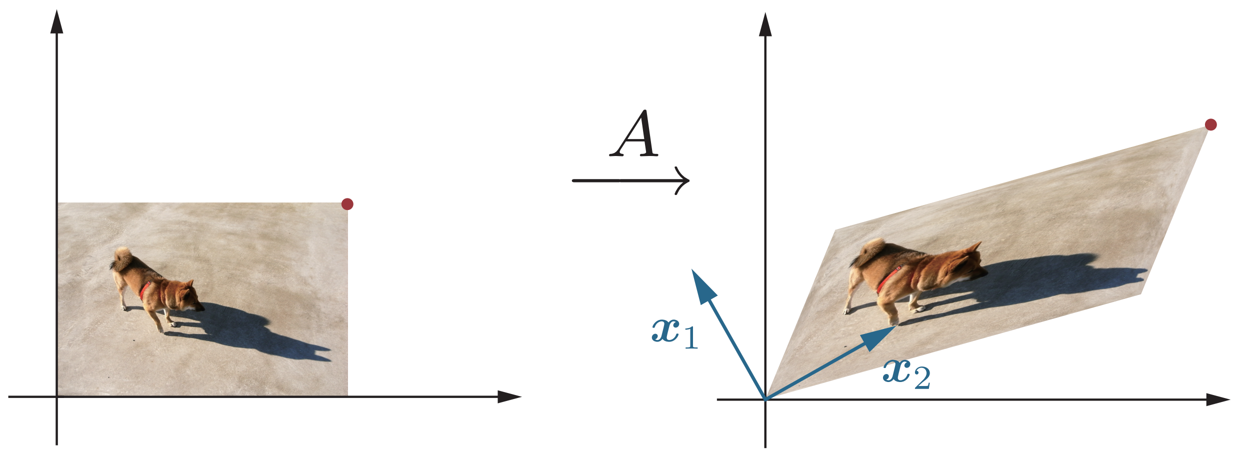
$$A\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 31 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 21 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 36\sqrt{3} \\ 36 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\boldsymbol{x}_2.$$

固有値・固有ベクトルの幾何学的な意味

例） $A = \dfrac{1}{24}\begin{pmatrix} 31 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 21 \end{pmatrix}$ の固有値は $\dfrac{2}{3}$ と $\dfrac{3}{2}$ であり,

$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ がそれぞれ対応する固有ベクトルである.

- 線形変換 ２次正方行列の積は, 平面の点の移動（図形の変換）を定める.



  - 固有ベクトルは図形が 変形（拡大・縮小）する方向 と解釈できる.
  - 固有値は, 拡大・縮小するときの 倍率 と解釈できる.

固有値の性質

定理.（固有値の性質）

λ が A の **固有値** である $\Longleftrightarrow$ $(A - \lambda E)$ は正則ではない

（証明）固有値・固有ベクトルの定義式を次のように変形;

$$
\begin{aligned}
A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} &\Longleftrightarrow A\boldsymbol{x} - \lambda\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\
&\Longleftrightarrow A\boldsymbol{x} - \lambda E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\
&\Longleftrightarrow (A - \lambda E)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad \cdots (*)
\end{aligned}
$$

- 行列 $(A - \lambda E)$ が正則であると仮定する.
- 逆行列 $(A - \lambda E)^{-1}$ が存在するので, これを $(*)$ の両辺に左からかけると,

$$
\boldsymbol{x} = E\boldsymbol{x} = (A - \lambda E)^{-1}(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = (A - \lambda E)^{-1}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \qquad \rightarrow \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \text{ に矛盾}
$$

固有値の求め方

定理.（固有値の性質）

λ が A の **固有値** である $\iff$ $(A-\lambda E)$ は正則ではない

$\iff$ λ は方程式 $|A-\lambda E|=0$ を満たす

- つまり, A の固有値は, 方程式 $\underbrace{|A-\lambda E|=0}_{\text{固有方程式}}$ の解 λ である.
- A が n 次正方行列ならば, $\underbrace{|A-\lambda E|}_{\text{固有多項式}}$ は λ に関する n 次多項式である..
- よって, n 次正方行列 A の固有値の個数は高々 n 個である.
- 固有値の求め方　n 次方程式 $|A-\lambda E|=0$ を解く.

固有ベクトルの求め方

- 行列 A の固有値 λ に対応する 固有ベクトル は

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \tag{$*$}$$

を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ のこと（ただし, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$）.

- $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \vdots \end{pmatrix}$ とおくと, $(*)$ は, $\underline{x, y, \ldots \text{ の連立１次方程式}}$となる.
- つまり, 連立１次方程式 $(*)$ の解が固有ベクトルである.
- $\boxed{\text{固有ベクトルの求め方}}$ 連立１次方程式 $(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = 0$ を解く.

固有ベクトルの性質

注　一般に, (i) $\boldsymbol{x}$ が行列 A の固有値 λ に対応する固有ベクトルならば, そのスカラー倍 (ii) $k\boldsymbol{x}$ も A の固有値 λ に対応する固有ベクトルである.

- (i) の仮定から, $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ が成り立つ.
- 行列の演算法則より,

$$
\begin{aligned}
A(k\boldsymbol{x}) &= k(A\boldsymbol{x}) \\
&= k(\lambda\boldsymbol{x}) \\
&= \lambda(k\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

- これにより, (ii) が示される.

- このことから, ひとつの固有値 λ に対応する固有ベクトルは, 一意的に定まるものではない（無数にある）ことがわかる.

固有値・固有ベクトルを求める手順

(1) 固有方程式 $|A - \lambda E| = 0$ の解 λ を求める.
（この λ が A の 固有値 ）

(2) (1) で求めた各固有値 λ に対して, 連立１次方程式

$$\boxed{(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}}$$

の解 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \vdots \end{pmatrix}$ を求める.

（このベクトル $\boldsymbol{x}$ が λ に対応する A の 固有ベクトル ）

固有値・固有ベクトルを求める計算例（２次の場合）

- 課題７の例題解説動画を参照.
- 問題集（および解答集）を参照.

固有値・固有ベクトルに関する注意

- 成分が実数の行列であっても, 実数の範囲では固有値が存在しないことがある.

例）回転行列 $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$

- R_θ の固有値を計算し, 固有値が実数でないことを確かめよ.
- ただし, 例外があることに注意.
  - $\theta = 0$ のとき, $R_0 = E$（固有値は 1）
  - $\theta = \pi$ のとき, $R_\pi = -E$（固有値は -1）

今回（第７回講義）のまとめ

(1)
- 固有値・固有ベクトルの定義 $Ax = \lambda x$
- 固有値・固有ベクトルの求め方
- 固有方程式 $|A - \lambda E| = 0$

(2)
- 行列の対角化
- $P^{-1}AP$ が対角行列になる場合,
  - その対角成分は A の固有値であること.
  - 正則行列 P の列は A の固有ベクトルであること.