

数学クォータ科目「数学」第6回(2/4)

行列に関する補遺 (基本変形)

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

3つの基本行列

次の3種類の正方行列のことを**基本行列**という。

(1) $A(i, j : c)$: (i, j) 成分が c で, 他の成分は単位行列と同じ。

$$\text{例) } A(1, 2 : 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $P(i, j)$: (i, j) 成分と (j, i) 成分は 1 , (i, i) 成分と (j, j) 成分は 0 , 他は成分は単位行列と同じ。

$$\text{例) } P(2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) $M(i : c)$: (i, i) 成分が c で, 他は単位行列と同じ。

$$\text{例) } M(1 : -3) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

基本行列 (1)

基本行列を行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ に **左からかける** と...

(1) $A(i, j : c)$

$$\begin{aligned} A(1, 2 : 2)A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + 2a_2 & b_1 + 2b_2 & c_1 + 2c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$A(1, 2 : 2)A$ は, A の第2行を2倍して, 第1行に加えた行列である.

基本行列 (2)

基本行列を行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ に **左からかける** と...

(2) $P(i, j)$

$$P(2, 3)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

$P(2, 3)A$ は, A の第2行と第3行を 入れ替えた行列である.

基本行列 (3)

基本行列を行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ に **左からかける** と...

(3) $M(i : c)$

$$M(1 : -3)A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a_1 & -3b_1 & -3c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

$M(1 : -3)A$ は, A の第1行を -3 倍した行列である.

基本行列と行基本変形

一般に,

(1) $A(i, j : c)A$ は,

A の第 j 行を c 倍して, 第 i 行に加えた行列である.

(2) $P(i, j)A$ は,

A の第 i 行と第 j 行を入れ替えた行列である.

(3) $M(i : c)A$ は,

A の第 i 行を c 倍した行列である.

- 行列 A に対し, \blacksquare のような行列を対応させることを, 行基本変形という.
- 一方, 基本行列を A の右側からかけた場合は, \blacksquare に関する変形になる.

基本行列と列基本変形

一般に,

(1) $AA(i, j : c)$ は,

A の第 i 列を c 倍して, 第 j 列に加えた行列である.

(2) $AP(i, j)$ は,

A の第 i 列と第 j 列を入れ替えた行列である.

(3) $AM(i : c)$ は,

A の第 i 列を c 倍した行列である.

- 行列 A に対し, \square のような行列を対応させることを, 列基本変形という.
- 行基本変形 と 列基本変形 を合わせて, 行列の基本変形 という.

基本変形の応用

行列の基本変形は、以下のことに応用できる。

- 連立1次方程式の解を求めること（解の存在性の判定）
- 逆行列を求めること
- **行列式の計算** ← 今回のテーマ（4つ目の講義動画を参照）

今回（第6回講義）のまとめ

- (1) ● 行列の転置（**転置行列**）
(対称行列, 交代行列, 三角行列, 直交行列)

- (2) ● 3つの**基本行列**
● 基本行列の積と **行列の基本変形** の関係

- (3) ● 2次正方行列の行列式
● 3次正方行列の行列式（サラスの公式）
● 行列 A が正則であることと, $|A| \neq 0$ が同値であること.

- (4) ● 行列式の基本性質
● 行列の基本変形と行列式の関係