数学クォータ科目「数学」第 6 回 (1/4)

行列に関する補遺（転置行列）

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

行列の転置

- 行列 A の行と列を入れ替えた行列を「A の転置行列」といい, ${}^t\!A$ と書く.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{転置}]{} {}^t\!A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

  - ${}^t\!A$ の第 i 行は, A の第 i 列.
  - ${}^t\!A$ の第 j 列は, A の第 j 行.
  - A が $m \times n$ 型ならば, ${}^t\!A$ は $n \times m$ 型.

- ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対し,

  それらの 内積 は $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 = {}^t\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}$ と表すことができる.

特別な行列［３］対称行列・交代行列

- ${}^tA = A$ を満たす正方行列 A を対称行列という.

例）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

- ${}^tA = -A$ を満たす正方行列 A を交代行列という.

例）$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

  - 交代行列の対角成分はすべて 0 である.

- どんな行列も対称行列と交代行列の和として表すことができる.
  - $A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$

特別な行列［4］三角行列

- $i < j$ ならば, $a_{ij} = 0$ を満たす正方行列 $A = (a_{ij})$ を下三角行列という.
- $i > j$ ならば, $a_{ij} = 0$ を満たす正方行列 $A = (a_{ij})$ を上三角行列という.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

下三角行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

上三角行列

注

- 下三角行列の転置は, 上三角行列である.
  また, 上三角行列の転置は, 下三角行列である.
- 下三角行列と上三角行列を合わせて, 三角行列という.

特別な行列［5］直交行列

- ${}^tAA = E$ を満たす正方行列 A を直交行列という.

例) $\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

  - 直交行列の定義式は,「${}^tA = A^{-1}$ が成り立つこと」と同値である.
  - このことから, 直交行列は正則行列であることがわかる.

特別な行列［5］直交行列

- ${}^t\!AA = E$ を満たす正方行列 A をなぜ 直交 行列というのだろうか.
  - 一般に, A の列を第１列から $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots$ とおくと, ${}^t\!AA$ の (i, j) 成分は, $\boldsymbol{a}_i$ と $\boldsymbol{a}_j$ の内積 $\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j \rangle$ である.

例）３次正方行列 $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix}$ の場合,

$$
{}^t\!AA = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_1 \\ {}^t\boldsymbol{a}_2 \\ {}^t\boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_1 & {}^t\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 & {}^t\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_3 \\ {}^t\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1 & {}^t\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_2 & {}^t\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3 \\ {}^t\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_1 & {}^t\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_2 & {}^t\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix}
$$

  - 直交行列は, ${}^t\!AA = E$ を満たすため, A を構成する列ベクトルは,

$$
\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j \rangle = {}^t\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}
$$

を満たす.

  - つまり, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots$ は, すべて長さが 1 で, 互いに直交する ベクトルである（このようなベクトルの集まりを正規直交基という）.

今回（第６回講義）のまとめ

(1) • 行列の転置（転置行列)

（対称行列, 交代行列, 三角行列, 直交行列）

(2) • ３つの基本行列

• 基本行列の積と行列の基本変形の関係

(3) • ２次正方行列の行列式

• ３次正方行列の行列式（サラスの公式）

• 行列 A が正則であることと, $|A| \neq 0$ が同値であること.

(4) • 行列式の基本性質

• 行列の基本変形と行列式の関係