数学クォータ科目「数学」第 5 回 (3/3)

逆行列と行列の正則性

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

【復習】実数の逆数

$\boxed{問}$ 2 の逆数とはどのような数ですか？

（答） $\dfrac{1}{2}$ または 2^{-1} または 0.5

（-2 は逆符号の数）

$\boxed{問}$ 実数 a の逆数とはどのような数ですか？

（答） $\dfrac{1}{a}$ または a^{-1}

$\boxed{問}$ 実数 a に対し, $\dfrac{1}{a}$ はどのような数ですか？

（答） a との 積 が 1 となる数.

- 実数 a の逆数とは, $ab = 1$ を満たす数 b のこと.
- $\underline{a \neq 0}$ ならば, a の逆数が存在する. a の逆数を a^{-1} または $\dfrac{1}{a}$ と書く.

逆行列

定義

n 次正方行列 A に対し, $AB = BA = E$ を満たす n 次正方行列 B を「A の逆行列」といい, $B = A^{-1}$ と書く（ただし, E は n 次単位行列）.

- $AB = E$ が成り立つならば, $BA = E$ も成り立つ.
- A の逆行列が存在するならば, それは一意的である.

逆行列の求め方

- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列は？
  - ∘ A の逆行列を $B = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$ とおくと,

$$E = AB \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by & az + bw \\ cx + dy & cz + dw \end{pmatrix}$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} ax + by = 1 \\ cx + dy = 0 \end{cases}} \text{ かつ } \boxed{\begin{cases} az + bw = 0 \\ cz + dw = 1 \end{cases}}$$

  - ∘ ２つの連立方程式を解くことにより, $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$ を得る.

２次正方行列の逆行列の公式

逆行列の求め方

- 一般の n 次正方行列の逆行列は？
  - 考え方は 2 次の場合と同じ.
  - 「未知数が n 個で式の数が n 個」の連立方程式を n 個解く必要がある（とてもたいへん）.
  - 行列の 基本変形 という手法で求めることができる.

    （この科目では扱いません）

逆行列の存在性

$\boxed{\text{問}}$ 正方行列 A に対し, その逆行列 A^{-1} は必ず存在するだろうか？

（答）必ず存在するとは限らない.

- 零行列 O の逆行列が存在しないことは明らか.

  $\because$ 零行列にどんな行列をかけても零行列になるから.

- $\underline{A \neq O, B \neq O, AB = O}$ を満たす行列 A, B の逆行列は存在しない.

  $\because$ A^{-1} が存在すると仮定する.

  $AB = O$ の両辺に左から A^{-1} をかけると, $B = O$ となる.

  これは, $\underline{B \neq O}$ に矛盾する.

正則行列

定義

正方行列 A の 逆行列が存在する とき, A を**正則行列**とよぶ.

- ２次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列は $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
- スカラー $\dfrac{1}{ad - bc}$ の分母が 0 のとき, 逆行列は定まらない.
- $ad - bc = 0$ のとき, A の逆行列は存在しない.
- これは同値条件である. つまり,

$$２次正方行列 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} は正則 \iff \boxed{ad - bc \neq 0}$$

逆行列の応用：連立１次方程式の解法

- 連立１次方程式は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と表すことができる.
  ただし, A は係数行列, $\boldsymbol{b}$ は定数項ベクトル（前回のスライド p.9 を参照）.
- 係数行列 A が正方行列 （つまり, 未知数 $x, y, z, \ldots$ の個数と式の個数が同じ） のとき,
  A が正則ならば, 連立方程式の 解 $\boldsymbol{x}$ は, A の逆行列によって求めること
  ができる.

連立１次方程式の解

A が正方行列, かつ正則ならば,
連立１次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ である..

$\because$ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の両辺に左から A^{-1} をかけることにより,

$$\boldsymbol{x} = E\boldsymbol{x} = (A^{-1}A)\boldsymbol{x} = A^{-1}(A\boldsymbol{x}) = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

今回（第５回講義）のまとめ

(1)
- 行列とは？ $\cdots$ 数（成分）を格子状に並べたもの. 行と列で構成.
- 行列の 型 , 正方行列, 対角成分, 対角行列, 単位行列, 零行列
- 和 と スカラー倍 の演算

(2)
- 行列の 積
- 連立１次方程式 の行列表示

(3)
- 逆行列
- 行列の正則性（正則行列）
- 連立１次方程式 の解が逆行列を用いて表わされること