数学クォータ科目「数学」第 5 回 (2/3)

行列の積

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

行列の演算

- 【復習】行列の（線形演算）演算
  - 同じ型の行列 A, B に対して, 和 $A+B$ が定まる.
  - 行列 A と実数 λ に対して, スカラー倍 λA が定まる.

- ２つの行列 A と B に対し, 積 AB が定義できる.
  - A と B はどのような型？
  - その定義は？
  - どのような意味を持つのか？

行列の積の定義

定義（行列の積）

$m \times l$ 型行列 $A = (a_{ik})$ と $l \times n$ 型行列 $B = (b_{kj})$ に対し，その積 AB を

$$AB = (c_{ij}), \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{il}b_{lj}$$

によって定める（AB は $m \times n$ 型行列である）．

行列の積の計算方法

例） $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ に対し, 積 AB を求める.

(1) A の方は行ごとに, B の方は列ごとにグループ化する.

$$AB = \begin{pmatrix} \boxed{-3 \quad 1 \quad -2} \\ \boxed{1 \quad -2 \quad -1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

(2) A の第 i 行と B の第 j 列の 内積 を AB の (i, j) 成分とする.

行列の積の計算方法

(2) A の第 i 行と B の第 j 列の 内積 を AB の (i, j) 成分とする.

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$ とすると,

$(1, 1)$ 成分は, $c_{11} = (-3) \times 1 + 1 \times 0 + (-2) \times 3 = \underline{-9}$.

$$\begin{array}{cccc} & & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{matrix} \\ & & \downarrow & \\ \begin{matrix} -3 & 1 & -2 \end{matrix} & \rightarrow & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}} \\ \begin{matrix} 1 & -2 & -1 \end{matrix} & & & \end{array}$$

行列の積の計算方法

(2) A の第 i 行と B の第 j 列の 内積 を AB の (i, j) 成分とする.

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$ とすると,

$(1, 2)$ 成分は, $c_{12} = (-3) \times 2 + 1 \times (-1) + (-2) \times 2 = \underline{-11}$.

$$\begin{matrix} & & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{matrix} \\ & & & \downarrow \\ \begin{matrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{matrix} & \rightarrow & \left(\begin{matrix} c_{11} \\ c_{21} \end{matrix} \right. & \left. \begin{matrix} c_{12} \\ c_{22} \end{matrix} \right) \end{matrix}$$

行列の積の計算方法

(2) A の第 i 行と B の第 j 列の 内積 を AB の (i, j) 成分とする.

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$ とすると,

$(2, 1)$ 成分は, $c_{21} = 1 \times 1 + (-2) \times 0 + (-1) \times 3 = \underline{-2}$.

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ & \downarrow & \\ \begin{matrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{matrix} \rightarrow & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}} \end{array}$$

行列の積の計算方法

(2) A の第 i 行と B の第 j 列の 内積 を $\underline{AB \text{ の } (i, j) \text{ 成分}}$ とする.

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$ とすると,

$(2, 2)$ 成分は, $\boxed{c_{22}} = 1 \times 2 + (-2) \times (-1) + (-1) \times 2 = \underline{2}.$

$$\begin{array}{ccc} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{matrix} \\ & & \downarrow \\ \begin{matrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{matrix} \rightarrow & \left(\begin{matrix} c_{11} \\ c_{21} \end{matrix} \right. & \left. \begin{matrix} c_{12} \\ c_{22} \end{matrix} \right) \end{array}$$

行列の積の計算方法

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-3)\times 1 + 1 \times 0 + (-2) \times 3 & (-3)\times 2 + 1 \times (-1) + (-2)\times 2 \\ 1 \times 1 + (-2)\times 0 + (-1)\times 3 & 1\times 2 + (-2)\times(-1) + (-1)\times 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -9 & -11 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

行列の積の演算法則

(1) 結合法則

- $A(BC) = (AB)C$（$= ABC$ と表記する）

(2) 交換法則は成立しない.

つまり, 必ずしも $AB = BA$ が成り立つわけではない.

(3) 分配法則

- $A(B + C) = AB + AC$

(4) 零行列 O の性質

- $AO = OA = O$

(5) 単位行列 E の性質

- $AE = EA = A$

行列の積の効用

(1) 連立１次方程式の行列表示

$$\begin{cases} ax+by=\alpha \\ cx+dy=\beta \end{cases} \iff \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ とおけば, 連立１次方程式は

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と書ける.

行列の積の意味

(2) 平面の 線形変換

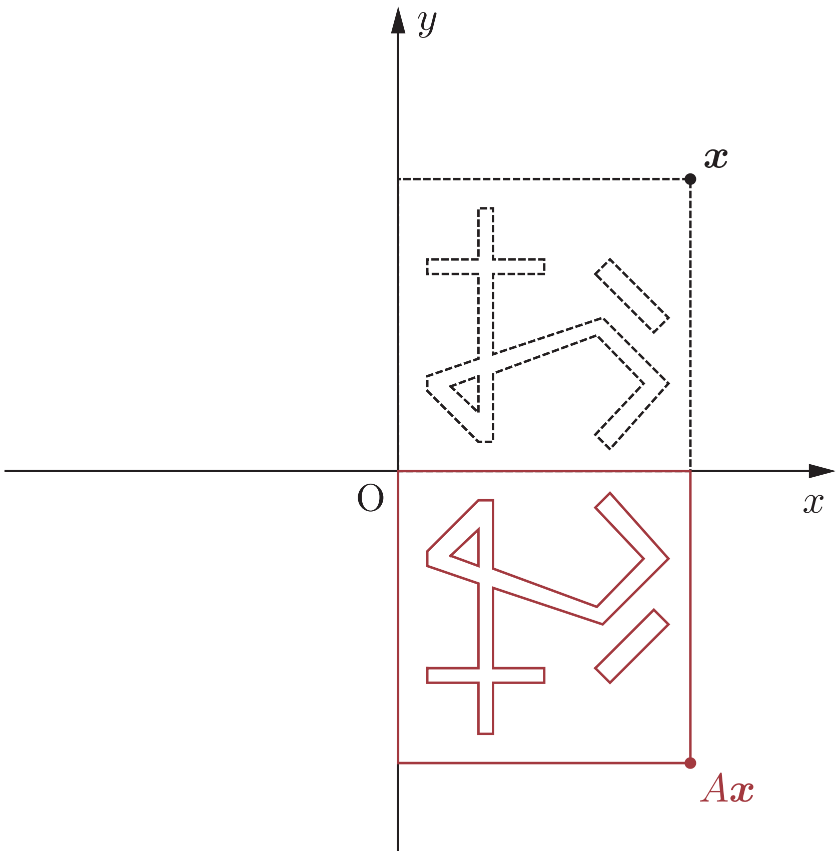
- ２次正方行列 A がある.
- 平面の座標 (x, y) を列ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表す（同一視する）.
- 点 $\boldsymbol{x}$ に対して, 点 $A\boldsymbol{x}$ を対応させること $(\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x})$ を,
「行列 A が定める線形変換（または１次変換）」という.
- 行列 A によって,「点 $\boldsymbol{x}$ が点 $A\boldsymbol{x}$ に移った」と解釈できる.

行列の積の意味

(2) 平面の 線形変換

例１） x 軸に関する対称移動

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

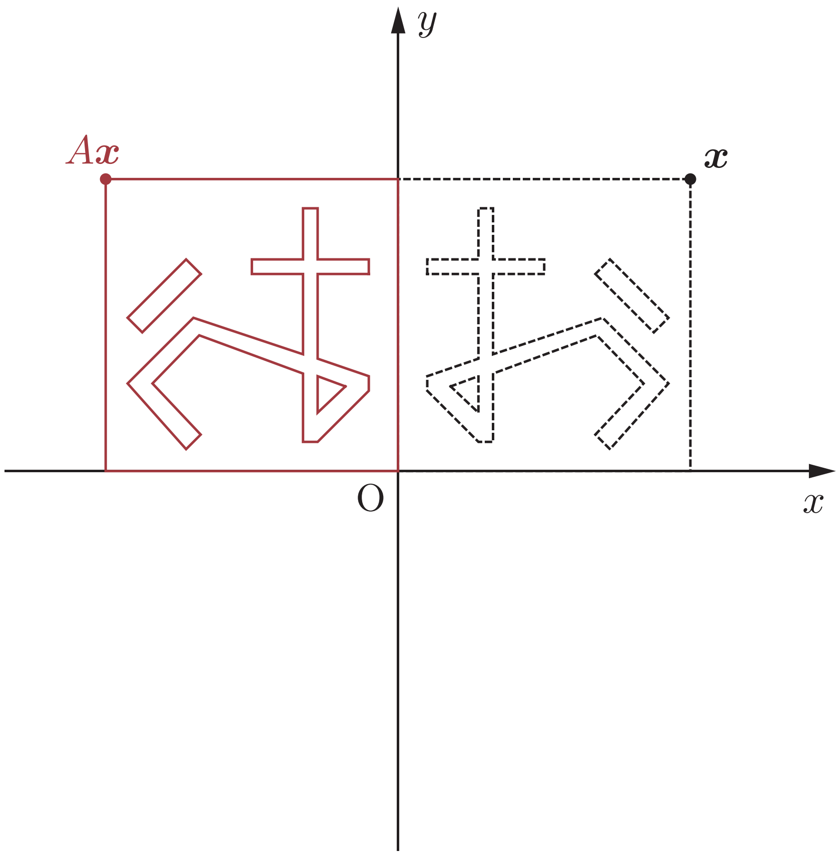


行列の積の意味

(2) 平面の 線形変換

例２）y 軸に関する対称移動

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

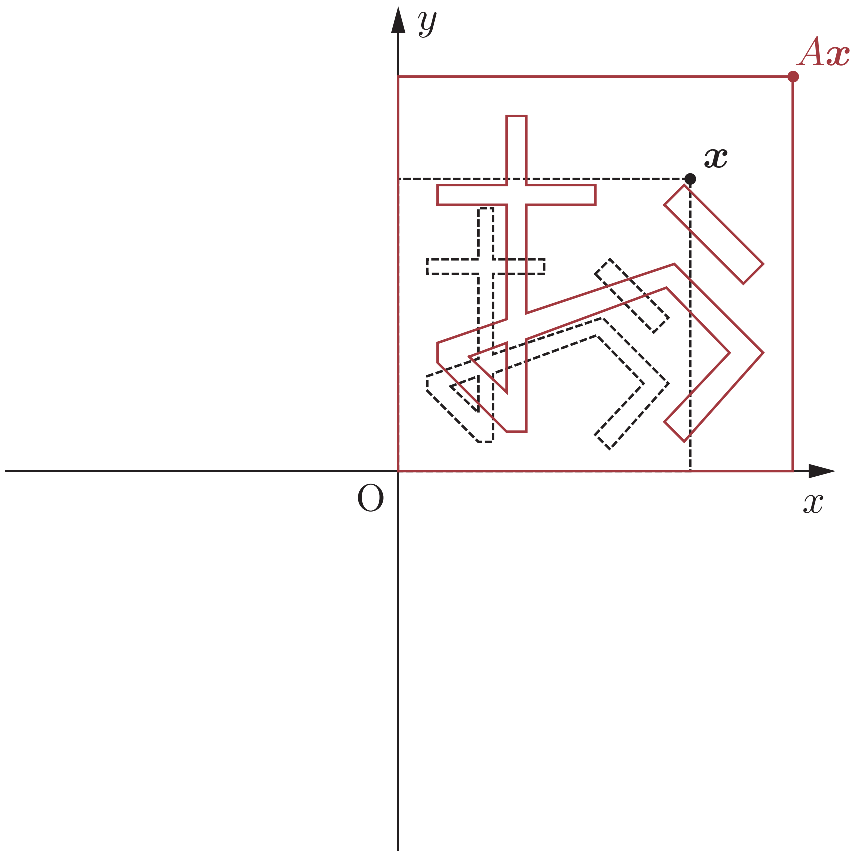


行列の積の意味

(2) 平面の 線形変換

例３）相似変換（拡大・縮小）

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

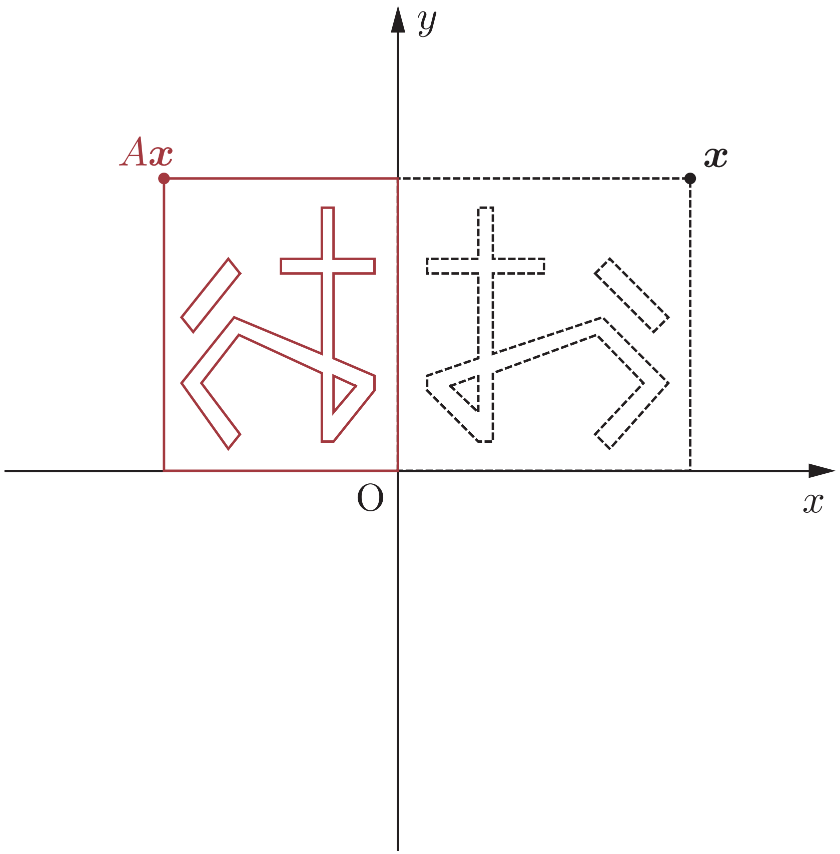


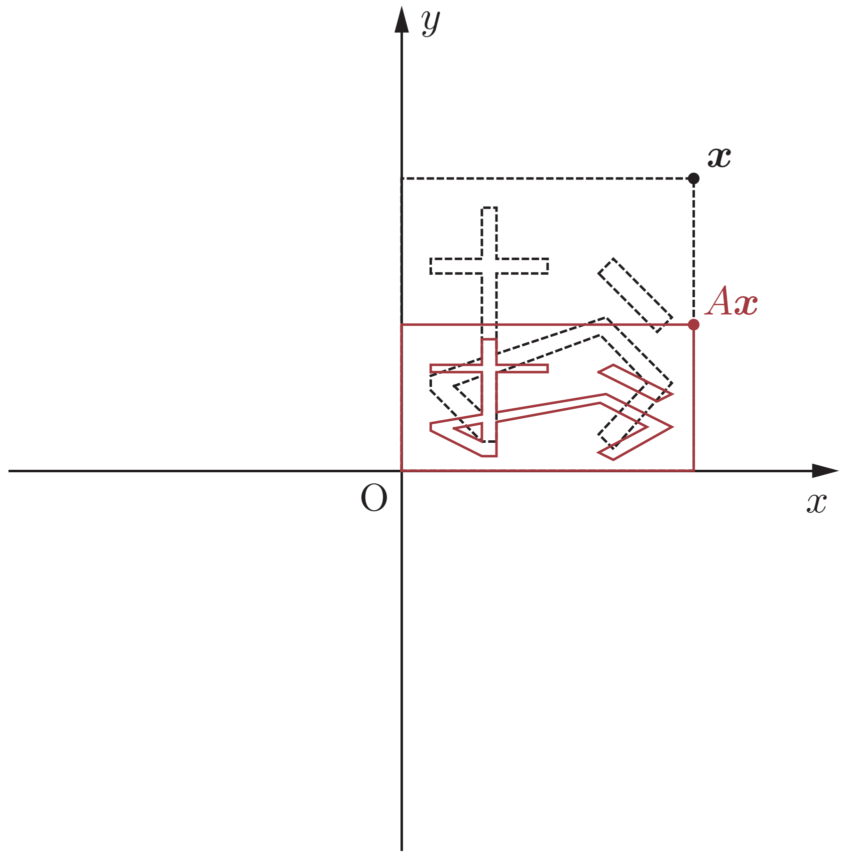
行列の積の意味

(2) 平面の 線形変換

例４）水平方向または垂直方向の拡大・縮小

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} kx \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ ky \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$





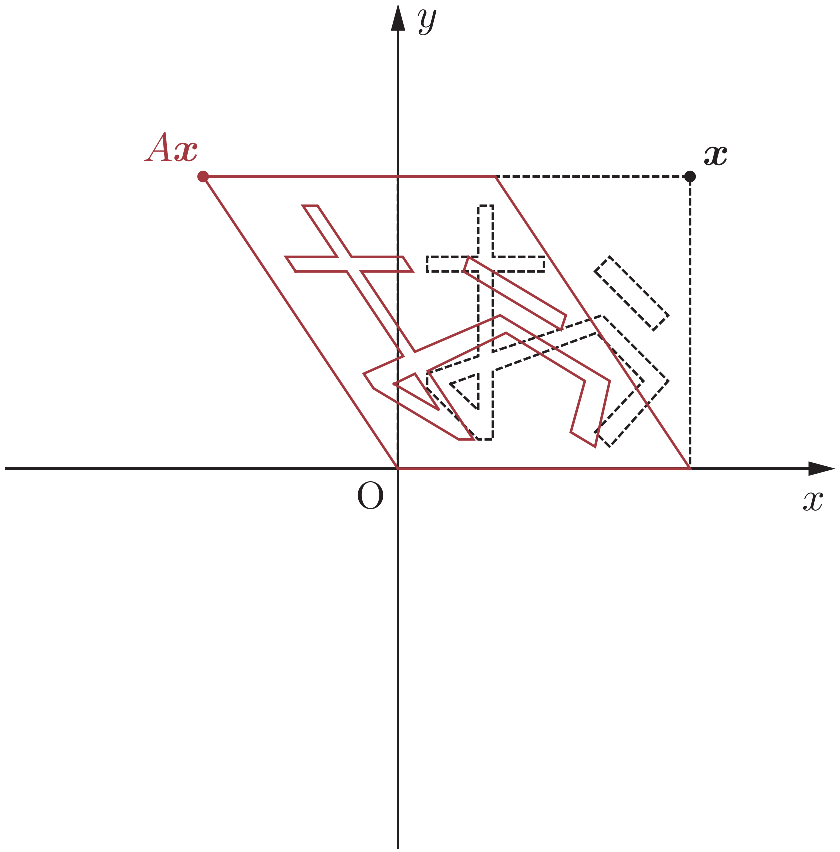
行列の積の意味

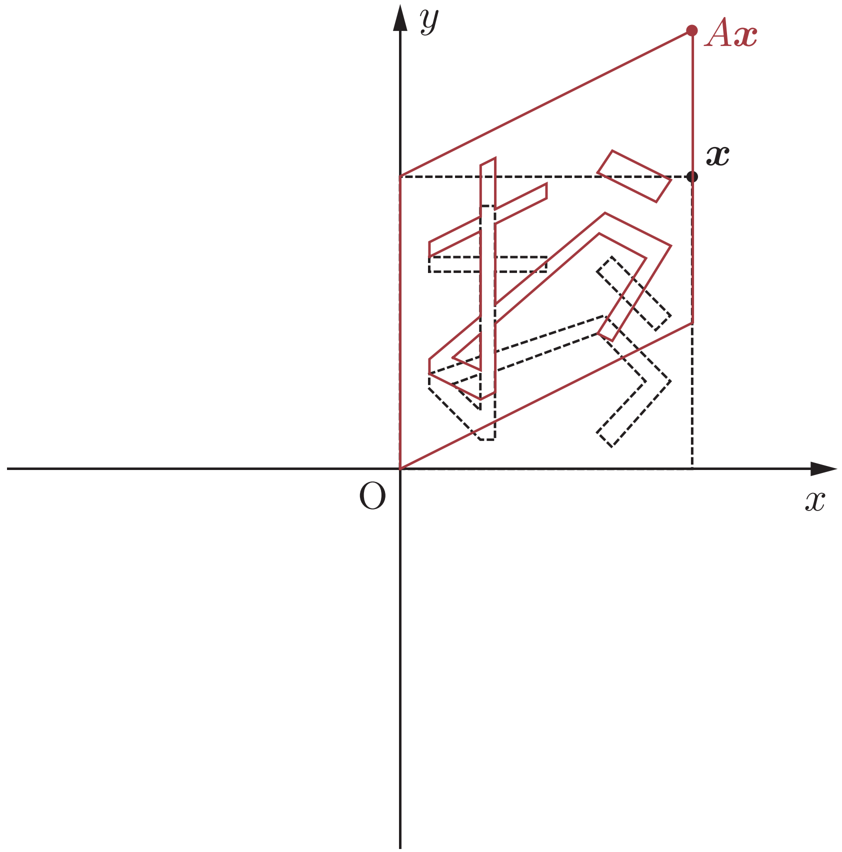
(2) 平面の 線形変換

例５）せん断

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$





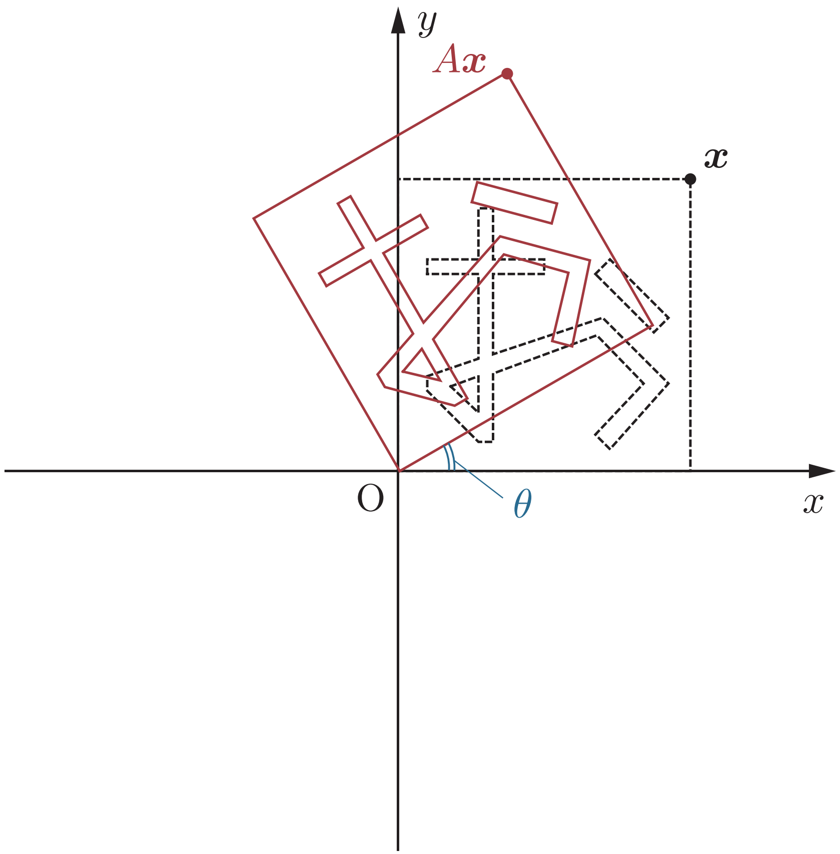
行列の積の意味

(2) 平面の 線形変換

例６）原点を中心とする角度 θ の回転移動

X

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

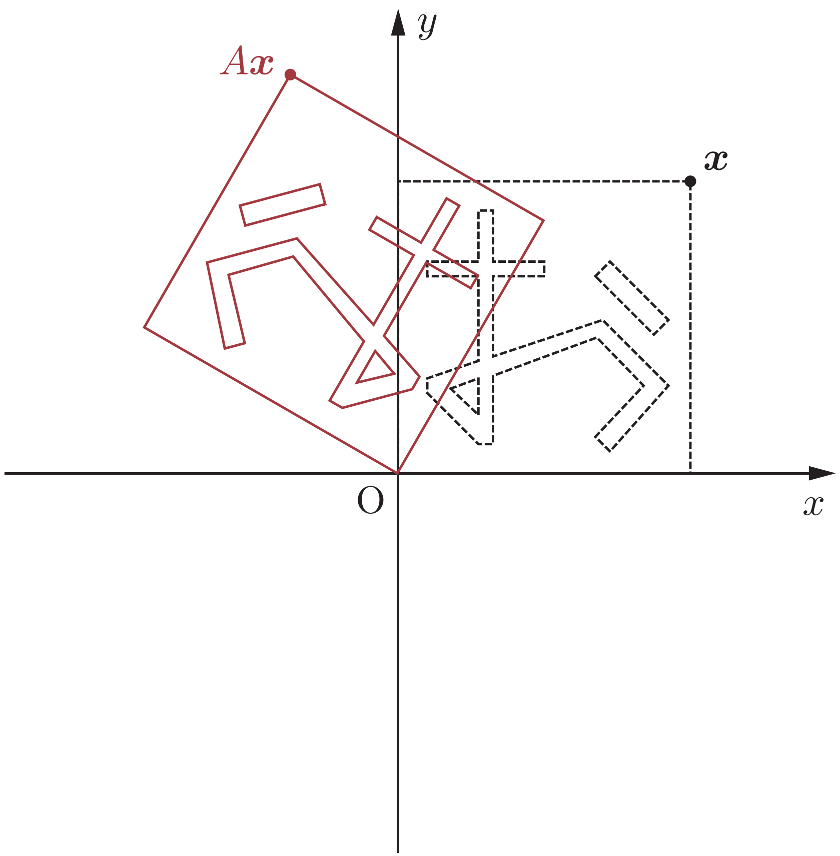


行列の積の意味

(2) 平面の 線形変換

例７）原点を通る直線 l に関する対称変換

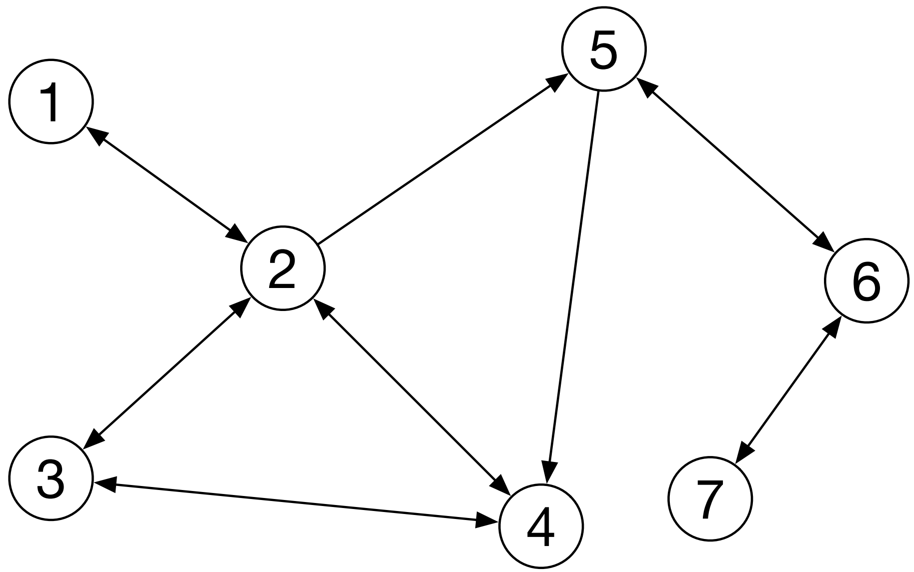
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



行列の積の意味

(3) グラフの隣接行列 M の n 乗 M^n の (i, j) 成分は,

「点 ⓘ から点 ⓙ へ, n ステップで到達する経路の個数」を表す.



$$\to M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & \boxed{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

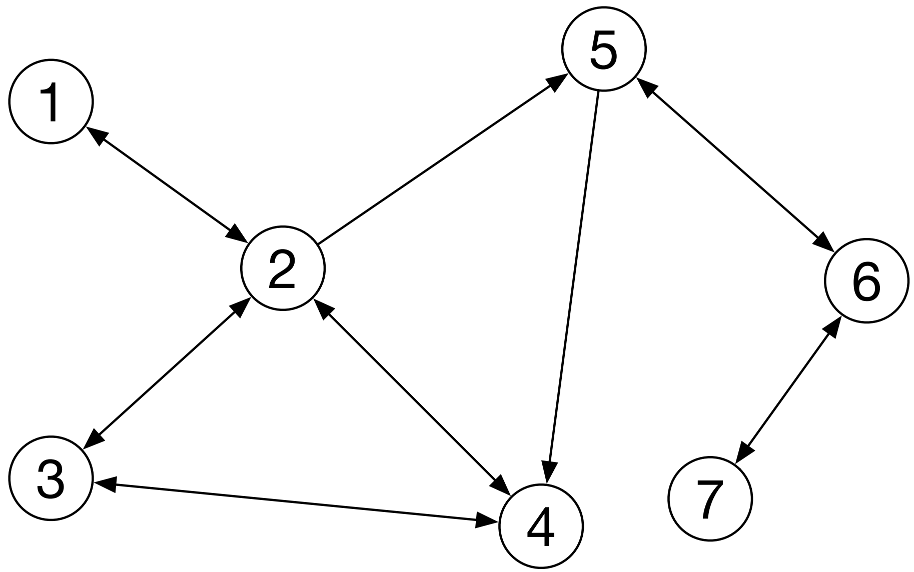
- M^2 の $(2, 4)$ 成分が $\boxed{2}$

  → 点 ② から点 ④ へ, 2 ステップで到達する経路は $\boxed{2}$ 個ある.

行列の積の意味

(3) グラフの隣接行列 M の n 乗 M^n の (i, j) 成分は,

「点 ⓘ から点 ⓙ へ, n ステップで到達する経路の**個数**」を表す.



$$\to M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & \boxed{4} & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

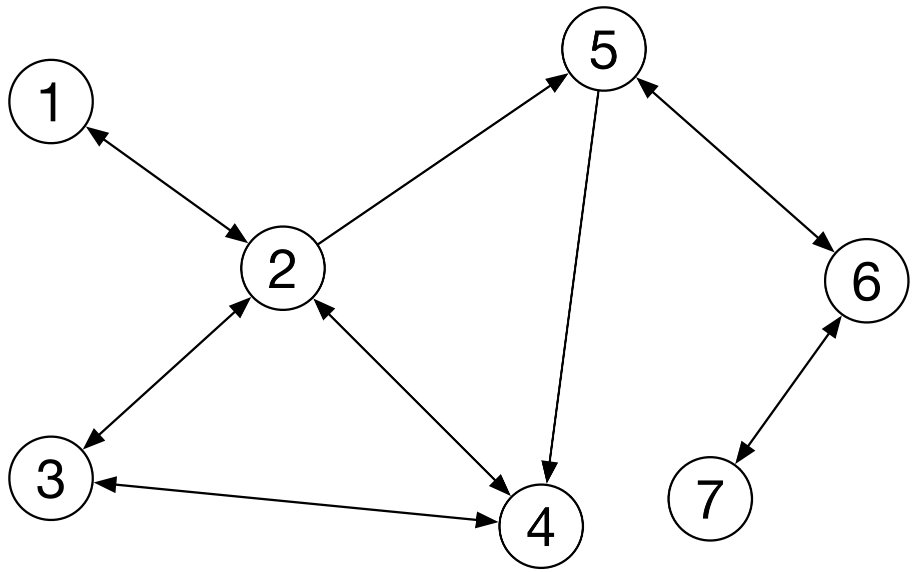
- M^3 の $(2, 4)$ 成分が $\boxed{4}$

  $\to$ 点 ② から点 ④ へ, 3 ステップで到達する経路は $\boxed{4}$ 個ある.

行列の積の意味

(3) グラフの隣接行列 M の n 乗 M^n の (i, j) 成分は,

「点 ⓘ から点 ⓙ へ, n ステップで到達する経路の**個数**」を表す.



$$\rightarrow M^5 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 4 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 12 & 7 & \boxed{12} & 3 & 5 & 0 \\ 4 & 7 & 8 & 7 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 7 & 8 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- M^5 の $(2, 4)$ 成分が $\boxed{12}$

  $\rightarrow$ 点 ② から点 ④ へ, 5 ステップで到達する経路は $\boxed{12}$ 個ある.

今回（第５回講義）のまとめ

(1)
- 行列とは？ ··· 数（成分）を格子状に並べたもの. 行と列で構成.
- 行列の 型, 正方行列, 対角成分, 対角行列, 単位行列, 零行列
- 和 と スカラー倍 の演算

(2)
- 行列の 積
- 連立１次方程式 の行列表示

(3)
- 逆行列
- 行列の正則性（正則行列）
- 連立１次方程式の解が逆行列を用いて表わされること