

数学クォータ科目「数学」第5回 (1/3)

# 行列とその線形演算

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

# 行列とは

- 行列とは？

- 数を格子状（矩形状）に並べたもの. 数の配列.
- 行列を構成する数を **成分** という.

例) 
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- 行列は, **行** と **列** によって構成される.

- **行** : 横に並んだ数の集まり (上から**第1行**, **第2行**, ... とよぶ)
- **列** : 縦に並んだ数の集まり (左から**第1列**, **第2列**, ... とよぶ)
- 第  $i$  行と第  $j$  列に共通して含まれる成分を  **$(i, j)$  成分** とよぶ.
- 行列の型 : 行の個数  $m$  と列の個数  $n$  を用いて表す;  **$m \times n$  型行列**

# 行列とは

- 行列を表す際は、アルファベットの大文字を用いることが多い。
  - 行列を一般的な形で表すとき、その成分をアルファベットの小文字に成分を表す文字を右下に添えて表す。

$$\text{例) } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- 上の等式を簡略化して、 $A = (a_{ij})$  と書くこともある。
- 行列の相等
  - 同じ型の行列  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$  に対し、対応するすべての成分が等しい（すなわち、 $a_{ij} = b_{ij}$  が成り立つ）とき、 $A = B$  と表す。

# 行列の例 [1]

## (1) 数表 から数値を取りだしたもの

数	0	1	2	3
1.0	0.0000	0.0043	0.0086	0.0128
1.1	0.0414	0.0453	0.0492	0.0531
1.2	0.0792	0.0828	0.0864	0.0899
1.3	0.1139	0.1173	0.1206	0.1239
1.4	0.1461	0.1492	0.1523	0.1553

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.0043 & 0.0086 & 0.0128 & \cdots \\ 0.0414 & 0.0453 & 0.0492 & 0.0531 & \cdots \\ 0.0792 & 0.0828 & 0.0864 & 0.0899 & \cdots \\ 0.1139 & 0.1173 & 0.1206 & 0.1239 & \cdots \\ 0.1461 & 0.1492 & 0.1523 & 0.1553 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

## (2) 成分表示されたベクトル

- 行ベクトル  $a = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$  は  $1 \times n$  型行列

- 列ベクトル  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$  は  $m \times 1$  型行列

- 点の座標 もベクトルとして表すことがある。

## 行列の例 [2]

(3) 連立方程式 
$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$$
 に対し,

• 未知数の **係数** だけを取りだしたものの： **係数行列** 
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

• **係数** と **定数項** を取りだしたものの： **拡大係数行列** 
$$\begin{pmatrix} a & b & \alpha \\ c & d & \beta \end{pmatrix}$$

(4) 2変数関数  $f(x, y)$  から定まる行列 
$$\begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$
 を

$f(x, y)$  の **ヘッセ行列** という。

(5) 2つの2変数関数  $x(u, v), y(u, v)$  から定まる行列 
$$\begin{pmatrix} x_u(u, v) & y_u(u, v) \\ x_v(u, v) & y_v(u, v) \end{pmatrix}$$
 を

変数変換  $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$  の **ヤコビ行列** という。

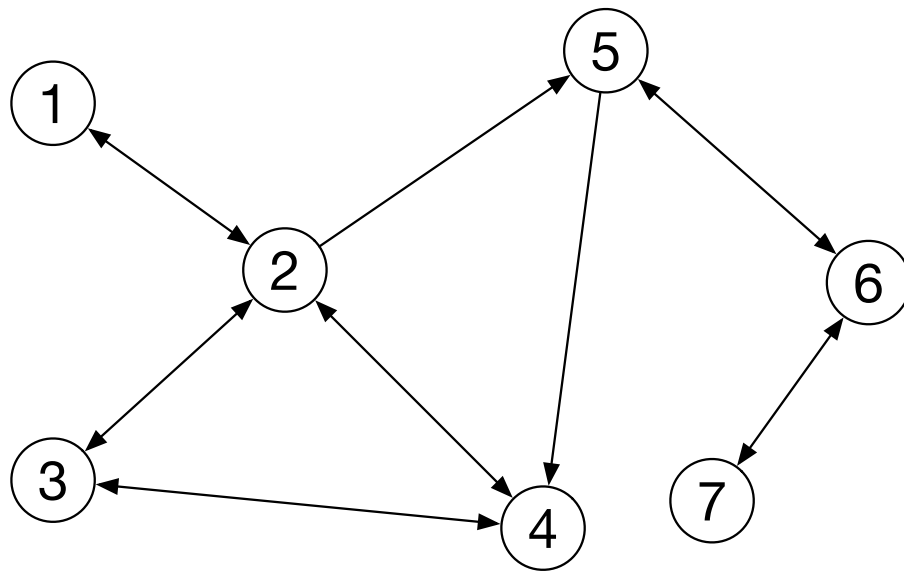
# 行列の例 [3]

(6) **グラフ** (= 道, ネットワーク, 点のつながり方) から

- 点①から点②へ1ステップで行ける →  $(i, j)$  成分が **1**
- 点①から点③へ1ステップで行けない →  $(i, j)$  成分が **0**

という規則で定まる行列をグラフの**隣接行列**という。

例)



$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

# 特別な行列 [1]

- 正方行列： $n \times n$  型行列を  $n$  次正方行列とよぶ。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- 正方行列のすべての  $(i, i)$  成分  $(i = 1, \dots, n)$  のことを対角成分とよぶ。
- 対角行列：対角成分以外がすべて 0 である正方行列を対角行列とよぶ。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

# 特別な行列 [2]

- 単位行列：対角成分がすべて **1** の対角行列を**単位行列**とよぶ。

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots$$

- 零行列：すべての成分が **0** である行列を**零行列**とよぶ。

$$O_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_2 (= O_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots$$



# 行列の線形演算 [1] 行列の和

和

同じ型の行列  $A, B$  に対し,  $A + B$  が定義できる.

- $(A + B$  の  $(i, j)$  成分) =  $(A$  の  $(i, j)$  成分) +  $(B$  の  $(i, j)$  成分).

例)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (-3) & 2 + 1 & 3 + (-2) \\ 4 + 1 & 5 + (-2) & 6 + (-1) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

- $A, B$  が  $m \times n$  型ならば,  $A + B$  も  $m \times n$  型.

# 行列の線形演算 [2] 行列のスカラー倍

## スカラー倍

任意の型の行列  $A$  と、実数  $\lambda$  に対し、 $\lambda A$  が定義できる。

- $(\lambda A \text{ の } (i, j) \text{ 成分}) = (A \text{ の } (i, j) \text{ 成分}) \times \lambda$ .

例)

$$\begin{aligned} 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 2 & 2 \times 3 \\ 2 \times 4 & 2 \times 5 & 2 \times 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $A$  が  $m \times n$  型ならば、 $\lambda A$  も  $m \times n$  型.

# 行列の線形演算（おまけ） 行列の差

差

同じ型の行列  $A, B$  に対し,  $A - B$  が定義できる.

- 和とスカラー倍を用いて,  $A - B = A + (-1)B$  と定義される.
- ( $A - B$  の  $(i, j)$  成分) = ( $A$  の  $(i, j)$  成分) - ( $B$  の  $(i, j)$  成分).

# 行列の線形演算の演算法則

- 行列の和とスカラー倍は, 成分毎に着目すれば実数の和と積なので, 次の **演算法則** を満たすことがわかる.

## (1) 結合法則

- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $\eta(\lambda A) = (\eta\lambda)A$

## (2) 交換法則

- $A + B = B + A$

## (3) 分配法則

- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda + \eta)A = \lambda A + \eta A$

## (4) 零行列 $O$ の性質

- $A + O = O + A = A$
- $\lambda O = O$

ただし,

$A, B, C$  は  $m \times n$  行列

$\lambda, \eta$  は実数

# 今回（第5回講義）のまとめ

- (1)
  - 行列とは？… 数（成分）を格子状に並べたもの。行と列で構成。
  - 行列の型, 正方行列, 対角成分, 対角行列, 単位行列, 零行列
  - 和とスカラー倍の演算
  
- (2)
  - 行列の積
  - 連立1次方程式の行列表示
  
- (3)
  - 逆行列
  - 行列の正則性（正則行列）
  - 連立1次方程式の解が逆行列を用いて表わされること