数学クォータ科目「数学」第４回 (3/3)

２変数関数の積分（２重積分）

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

2 重積分

- 2 重積分とは
    - 2 変数関数 $f(x,y)$ と, xy-平面内の 領域 D から定まる量. これを

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

と表す.

    - 累次積分によって計算できる.

- 計算手順

(1) 領域 D を 2 つの不等式 $\boxed{} \leq x \leq \boxed{}$, $\boxed{} \leq y \leq \boxed{}$ で表す.

(2) (1) の区間を積分区間とする累次積分を計算する.

ただし, 区間の両端が定数の変数に関する積分を後にするよう式をつくる.

２重積分の計算例［１］

例１） $\displaystyle\iint_D (x^2 - 2xy)\,dxdy, \qquad D: -1 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le 2$

解

- 積分領域 D を表す２つの不等式は, どちらも区間の両端が定数.
- よって, どちらの変数から積分してもよい.
- つまり,

$$\iint_D (x^2 - 2xy)\,dxdy = \int_0^2 \left(\int_{-1}^1 (x^2 - 2xy)\,dx \right) dy$$

でも

$$\iint_D (x^2 - 2xy)\,dxdy = \int_{-1}^1 \left(\int_0^2 (x^2 - 2xy)\,dy \right) dx$$

でもよい（計算結果が同じになることを確かめよう）.

- 前者の計算については, 前回のスライド p.4 を参照.

２重積分の計算例［２］

例２） $\displaystyle\iint_D x^2\,dxdy,$ $\quad D: -1 \leq x \leq 1\ ,\ x-1 \leq y \leq 2-x$

解

- 積分領域 D を表す２つの不等式は, x の方だけ区間の両端が定数.
（y の方は, 不等式の両辺に変数 x が含まれている）
- よって, x に関する積分を後にする（y に関する積分を最初にする）.
- つまり,

$$\iint_D x^2\,dxdy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{x-1}^{2-x} x^2\,dy\right)dx$$

としなければならない.

- 計算については, 前回のスライド p.6 を参照.

注 ２重積分の $dxdy$ と, 累次積分の dx dy は異なる記号であることに注意.

2 重積分を累次積分として表す

- 一般に, 積分領域 D が
  - $a \leq x \leq b$, $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$ と表わされる場合は

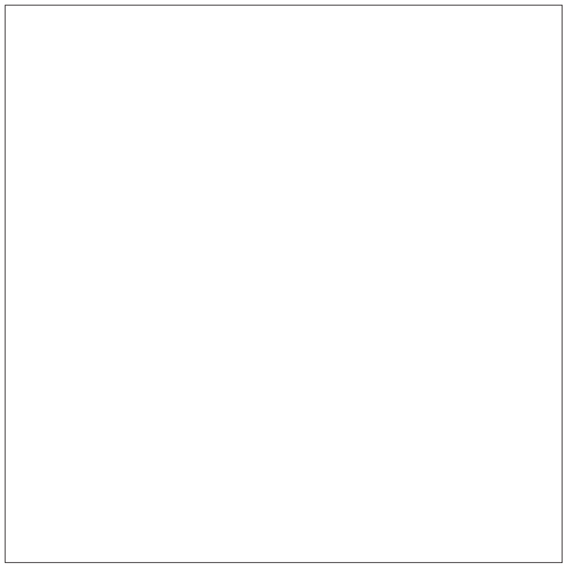
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

  - $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$, $c \leq y \leq d$ と表わされる場合は

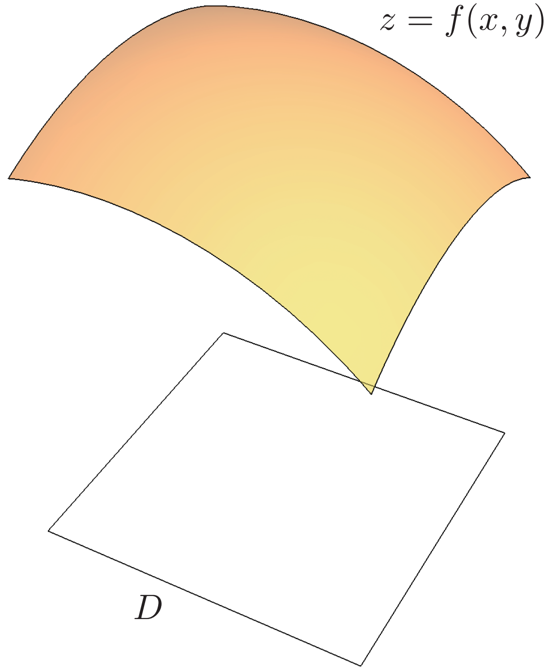
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

  となる.
- 積分順序は積分領域 D の表し方に依存するが, 表し方は一意的ではない.

２重積分の厳密な定義（リーマン和の極限）



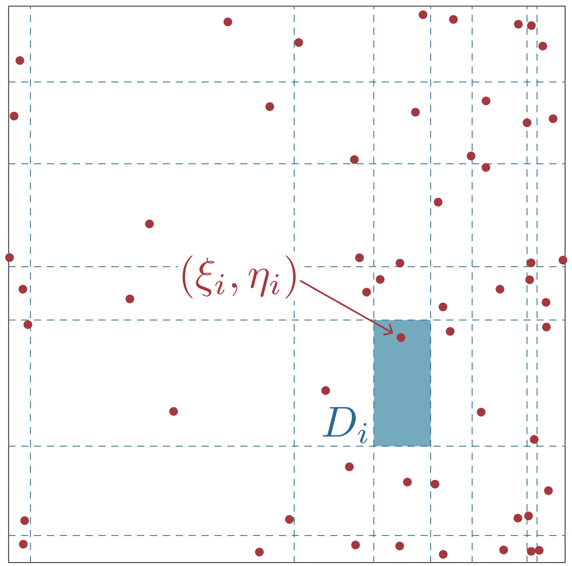
xy-平面内の領域 D



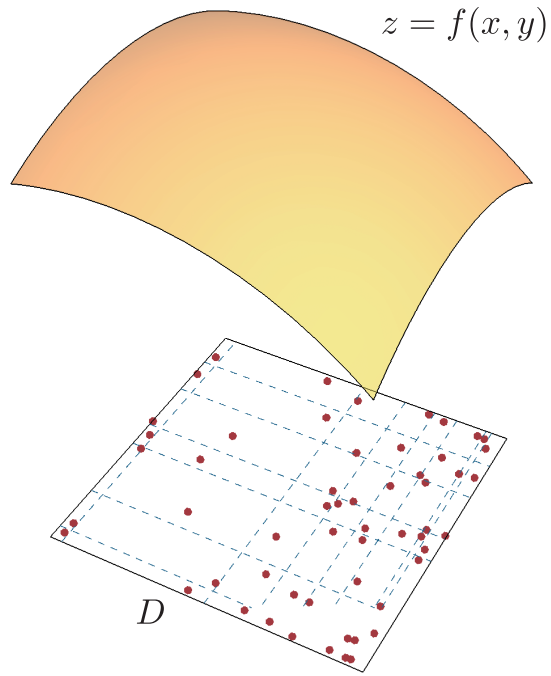
xyz-空間内の曲面 $z = f(x, y)$

- 領域 D で定義された有界な関数 $f(x, y)$ を考える.
  （つまり, $|f(x, y)| < K$ を満たす）

２重積分の厳密な定義（リーマン和の極限）



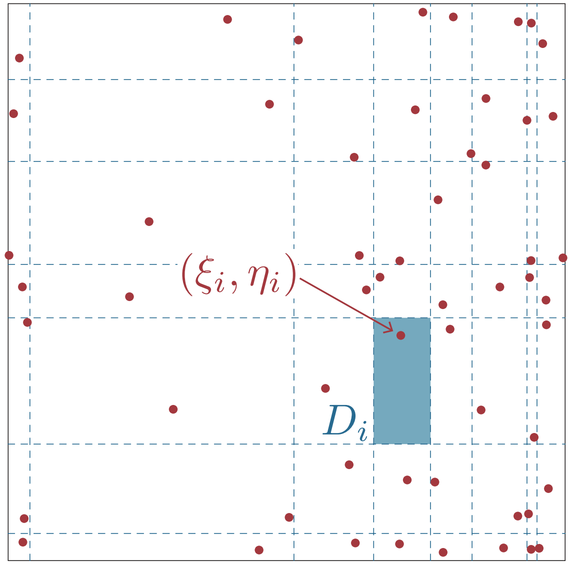
xy-平面内の領域 D



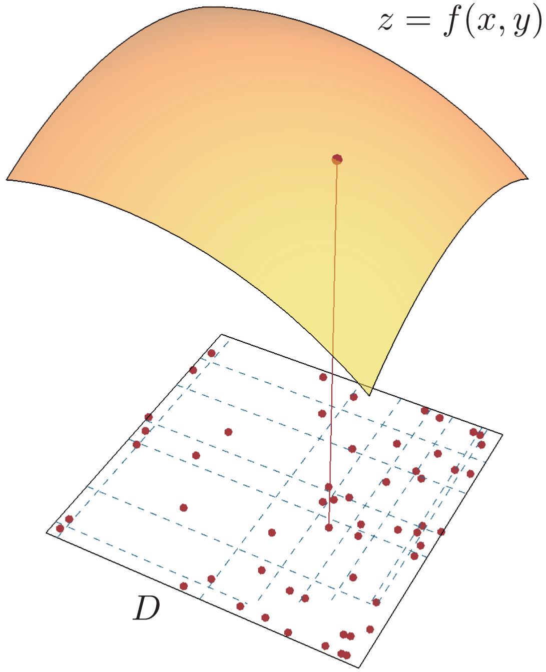
xyz-空間内の曲面 $z = f(x, y)$

- 領域 D を n 個の小領域 $D_1, \ldots, D_n$ に分割する（Δ と表す）．
- 各小領域 D_i から 点 (ξ_i, η_i) を適当に選ぶ．

２重積分の厳密な定義（リーマン和の極限）



xy-平面内の領域 D



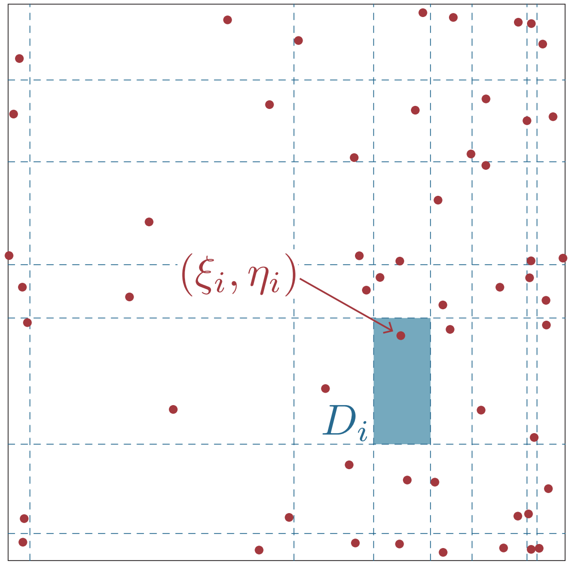
xyz-空間内の曲面 $z = f(x, y)$

- 以上のものから定まる $R(\Delta; \{(\xi_1, \eta_1), \ldots, (\xi_n, \eta_n)\}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, S(D_i)$

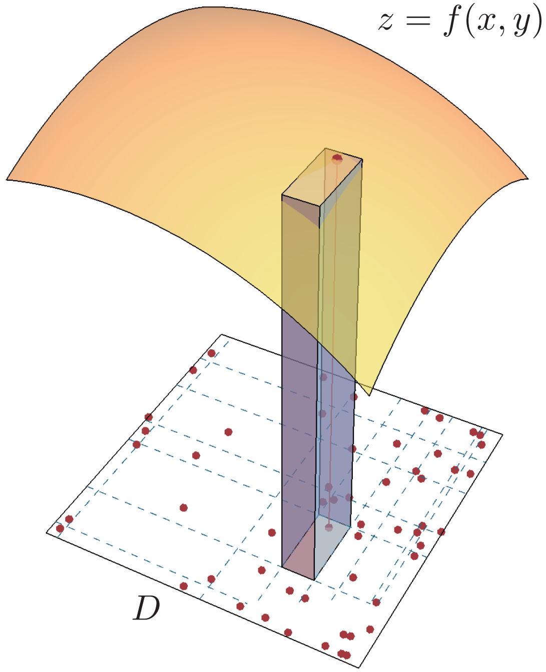
  を**リーマン和**とよぶ.

  (ただし, $S(D_i)$ は小領域 D_i の面積を表す)

２重積分の厳密な定義（リーマン和の極限）



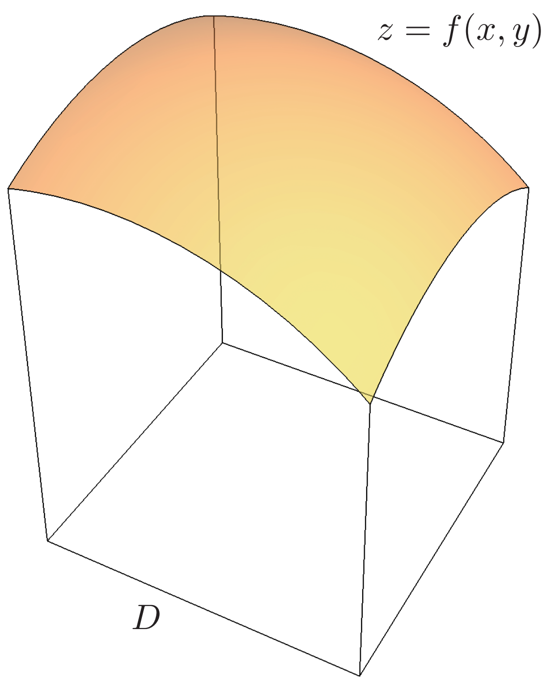
xy-平面内の領域 D



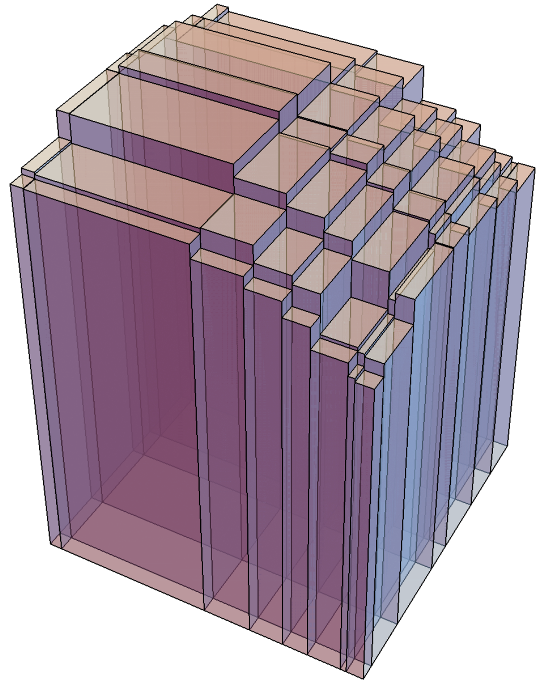
xyz-空間内の曲面 $z = f(x, y)$

- $R(\Delta; \{(\xi_1, \eta_1), \ldots, (\xi_n, \eta_n)\}) = \sum_{i=1}^{n} \boxed{f(\xi_i, \eta_i)} \boxed{S(D_i)}$ の意味は？
    - $\boxed{}$ は小領域 D_i の面積なので, 右辺 Σ 記号の中身は, 小領域を底面とし, 高さが $\boxed{f(\xi_i, \eta_i)}$ の柱体の体積と解釈できる.

２重積分の厳密な定義（リーマン和の極限）



柱体



リーマン和

- $R(\Delta; \{(\xi_1, \eta_1), \ldots, (\xi_n, \eta_n)\}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, S(D_i)$ の意味は？
  - つまり, 領域 D を底面とし, 関数 $y = f(x, y)$ のグラフが上面である柱体の体積を柱体の体積の和で近似したものである.

２重積分の厳密な定義とその幾何学的解釈

- D の分割 Δ を限りなく細かくしていくとき, このリーマン和が分割 Δ と点 (ξ_i, η_i) の選び方に依らずに一定値 I に近づくとき, この I を「領域 D における $f(x, y)$ の２重積分」とよび,

$$I = \iint_D f(x, y)\, dxdy$$

と表す.

- （すでに述べたように）２重積分は累次積分によって計算できる.
- D 上で $f(x, y) \geqq 0$ ならば, ２重積分 $\iint_D f(x, y)\, dxdy$ は, 底面が D で, 上面が曲面 $z = f(x, y)$ の柱体の体積である.

２重積分の厳密な定義とその幾何学的解釈

例題）次の不等式で表わされる空間の領域 Ω の体積 V を求めなさい．

$$\Omega : 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le x + y$$

考え方

- x と y の範囲：xy-平面内の領域と考える（これを D をおく）．
- z の範囲：$z = 0$（xy-平面）から $z = x + y$（曲面）まで．

つまり，

$$V = \iint_D (x + y)\, dxdy$$

である．