数学クォータ科目「数学」第４回 (2/3)

２変数関数の積分（累次積分）

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

【復習】１変数関数の積分

- 不定積分
  - 関数 $f(x)$ の原始関数（の全体）を表したもの;

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

  - $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数（$F'(x) = f(x)$）. C は任意定数（積分定数）.

- 定積分
  - 関数 $f(x)$ と実数の区間 $a \leq x \leq b$ （積分区間）から定まる量;

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

  - 関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸, 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれる図形の面積と解釈できる.

２変数関数の積分

- ２変数関数の積分を「２重積分」という．
- 「２重積分」は, 定積分の２変数関数版.

  リーマン和の極限として定義される．（← 次の講義動画のテーマ）
- ２重積分は「累次積分」という計算方法により求まる．　１変数関数の

  定積分を２回繰り返す

累次積分［1］

- 表記
  - $\displaystyle\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$ または $\displaystyle\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$
  - dx と dy の順序に注意
- 計算手順

(1) 中身 の定積分を計算する;

$$\int_a^b \left(\boxed{\int_c^d f(x,y)\,dy} \right) dx \quad \text{または} \quad \int_c^d \left(\boxed{\int_a^b f(x,y)\,dx} \right) dy$$

ただし, 積分する変数でない変数は定数とみなす.

(2) (1) で計算した $\boxed{}$ を外側の積分区間・変数に関して定積分する;

$$\int_a^b \boxed{（x\text{ の関数}）}\, dx \quad \text{または} \quad \int_c^d \boxed{（y\text{ の関数}）}\, dy$$

累次積分［1］計算例

例１） $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_{-1}^1 (x^2 - 2xy)\,dx \right) dy$

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \left(\int_{-1}^1 (x^2 - 2xy)\,dx \right) dy &= \int_0^2 \left[\frac{1}{3}x^3 - 2y \cdot \frac{1}{2}x^2 \right]_{x=-1}^{x=1} dy \\
&= \int_0^2 \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 y \right]_{x=-1}^{x=1} dy \\
&= \int_0^2 \left\{ \frac{1}{3} - y - \left(-\frac{1}{3} - y \right) \right\} dy \\
&= \int_0^2 \frac{2}{3}\,dy = \left[\frac{2}{3}y \right]_0^2 = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

累次積分［2］

- 積分区間に変数が含まれる場合がある.
  - $\displaystyle\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$　または　$\displaystyle\int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy$
  - こちらが一般的（［1］の場合を含む）
- 計算手順 ※［1］の場合と同じ

(1) 中身 の定積分を計算する;

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx \quad \text{または} \quad \int_d^c \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy$$

ただし, 積分する変数でない変数は定数とみなす.

(2) (1) で計算した ［　］ を外側の積分区間・変数に関して定積分する;

$$\int_a^b \text{（}x\text{ の関数）}\,dx \quad \text{または} \quad \int_c^d \text{（}y\text{ の関数）}\,dy$$

累次積分［2］計算例

例２） $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\int_{x-1}^{2-x} x^2\,dy\right)dx$

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\left(\int_{x-1}^{2-x} x^2\,dy\right)dx &= \int_{-1}^{1}\left[x^2 y\right]_{y=x-1}^{y=2-x}dx \\
&= \int_{-1}^{1} x^2\{(2-x)-(x-1)\}\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} x^2(3-2x)\,dx = \int_{-1}^{1}(3x^2-2x^3)\,dx \\
&= \left[3\cdot\frac{1}{3}x^3 - 2\cdot\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{1} = \left[x^3-\frac{1}{2}x^4\right]_{-1}^{1} \\
&= \left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(-1-\frac{1}{2}\right) = 2.
\end{aligned}
$$

累次積分における２つの積分区間

- $\displaystyle\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$

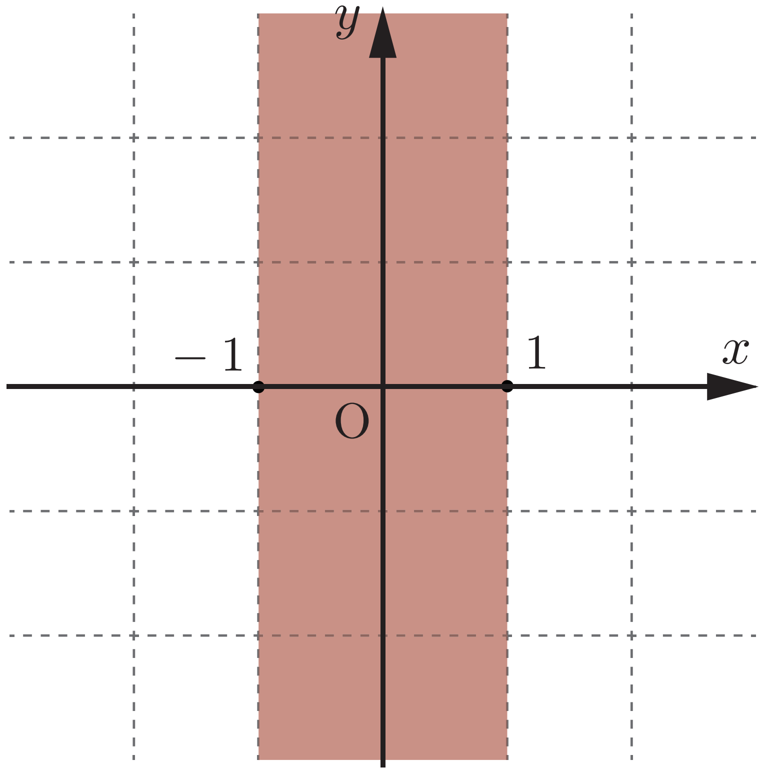
  $\to$ $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ これは，「上の２つの不等式を満たす点 (x,y) の全体」

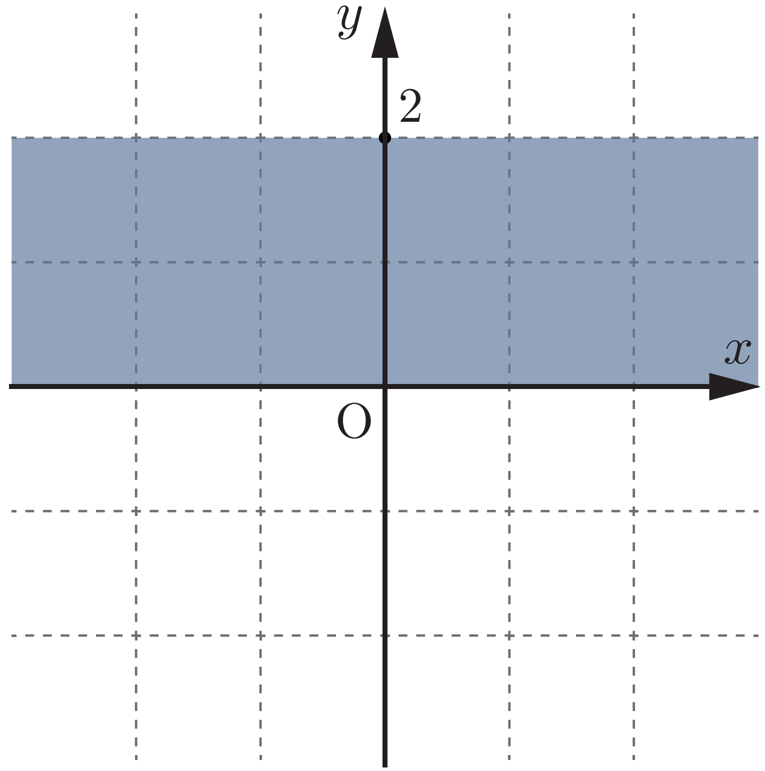
  すなわち，xy-平面内の 領域 を表している（これを積分領域という）.

積分領域の例［１］

例１） $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_{-1}^1 (x^2 - 2xy)\, dx \right) dy$

$\rightarrow$ $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$

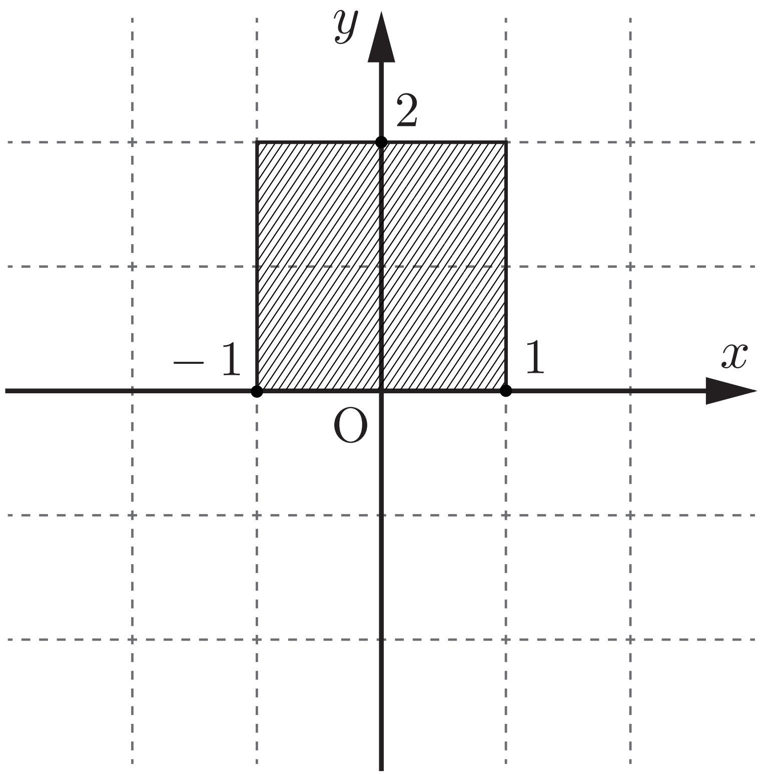




積分領域の例［１］

例１） $\displaystyle \int_0^2 \left(\int_{-1}^1 (x^2 - 2xy)\, dx \right) dy$

$\rightarrow$ $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$

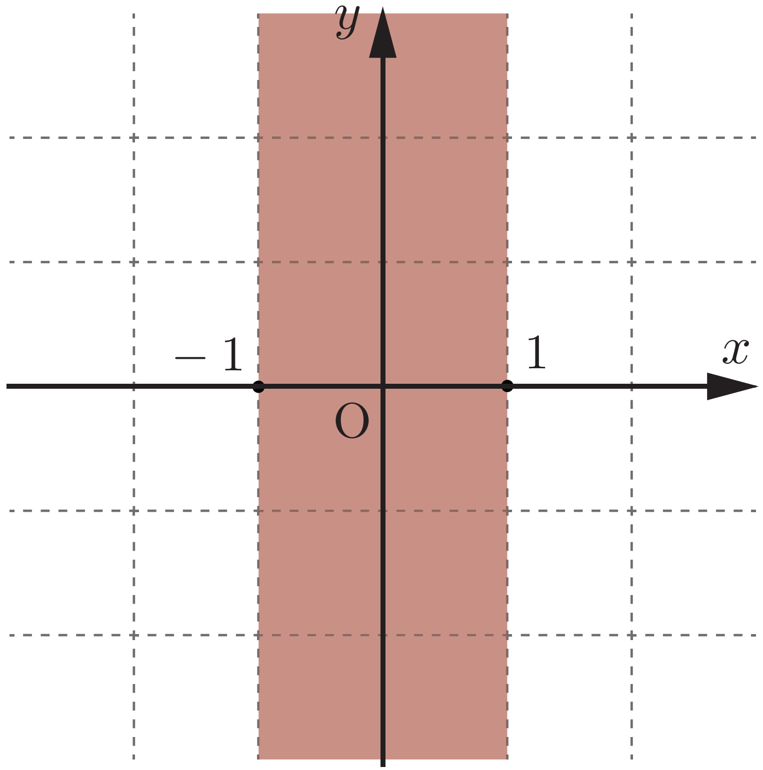


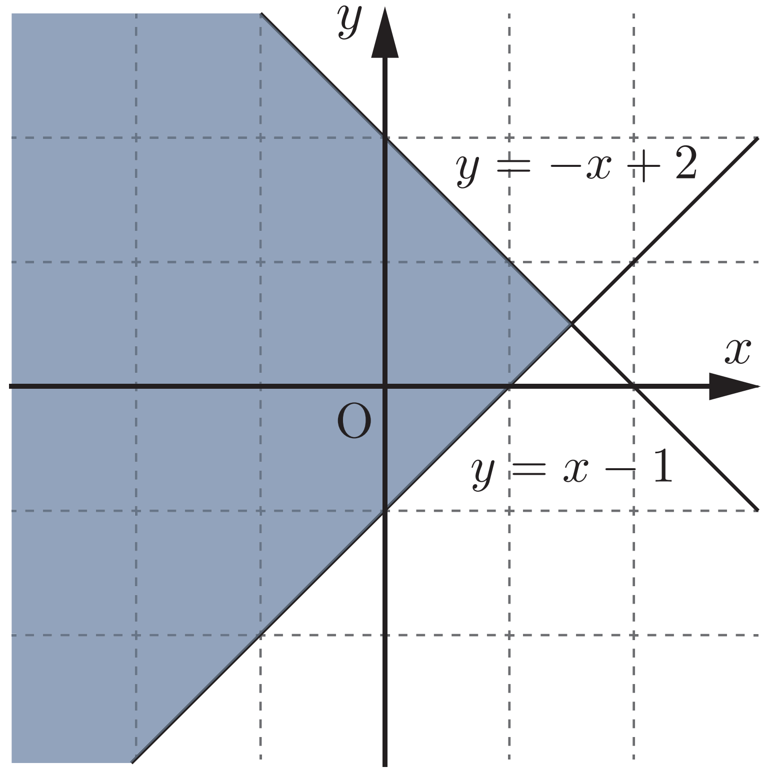
不等式 $-1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2$ が表す領域

積分領域の例［2］

例２） $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\int_{x-1}^{2-x} x^2\,dy\right)dx$

$\rightarrow$ $-1 \leq x \leq 1$, $x-1 \leq y \leq 2-x$ $\leftarrow$ $x-1 \leq y$ と $y \leq 2-x$ に分けて考える.

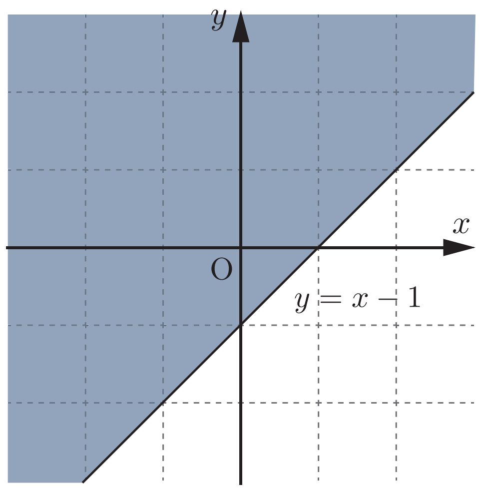




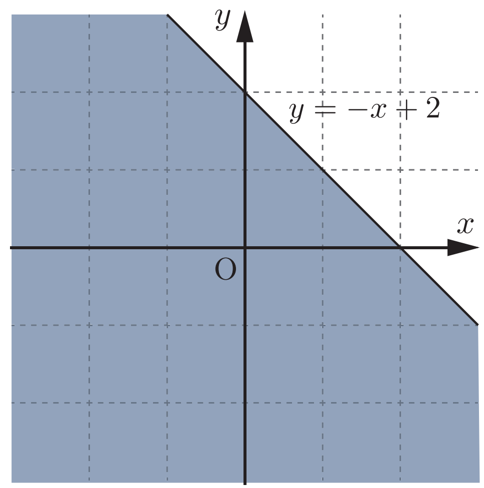
積分領域の例［２］

例２）$\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\int_{x-1}^{2-x} x^2\,dy\right)dx$

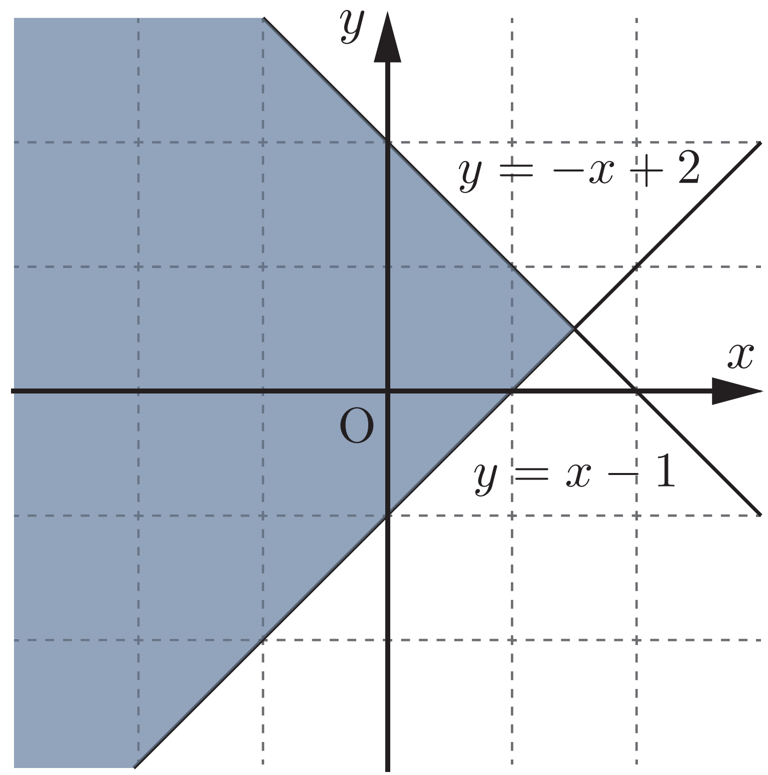
$\rightarrow$ $-1 \leq x \leq 1$, $x-1 \leq y \leq 2-x$ ← $x-1 \leq y$ と $y \leq 2-x$ に分けて考える.



$x-1 \leq y$ の領域



$y \leq 2-x$ の領域



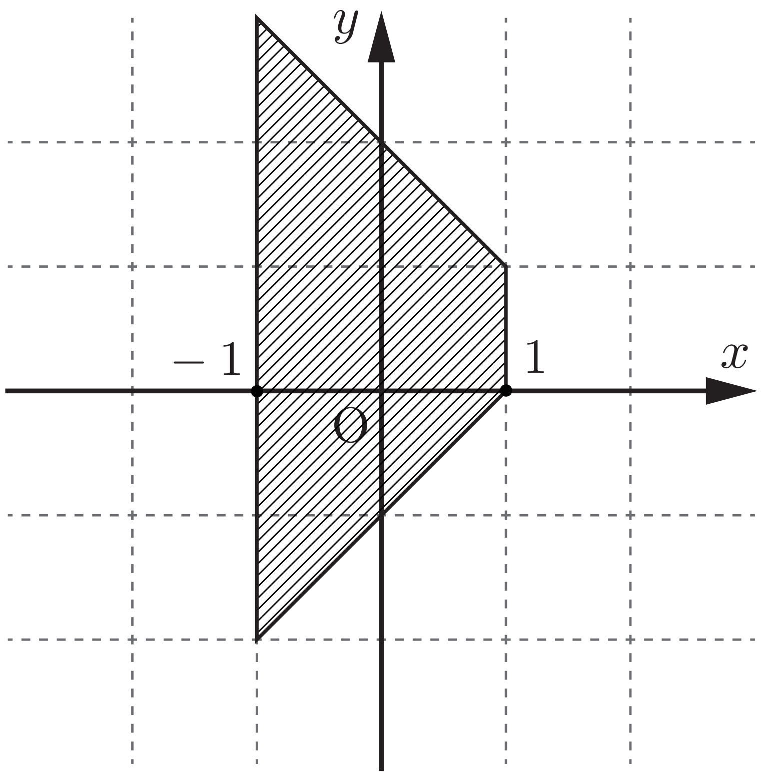
$x-1 \leq y \leq 2-x$ の領域

（左の２つの領域の共通部分）

積分領域の例［2］

例２）$\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\int_{x-1}^{2-x} x^2\,dy\right)dx$

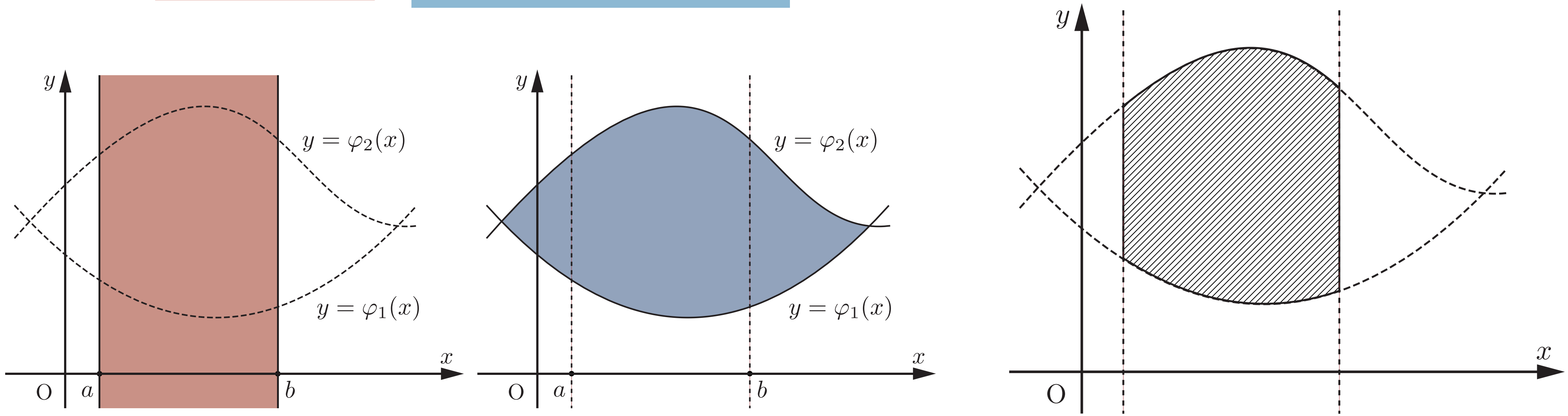
$\rightarrow$ $-1 \leq x \leq 1$, $x-1 \leq y \leq 2-x$



不等式 $-1 \leq x \leq 1,\ x-1 \leq y \leq 2-x$ が表す領域

積分領域

- $$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$
  $\to$ $a \leq x \leq b$, $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$



領域 $a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$

$\boxed{\text{注}}$ 不等式の等号が成り立つ点 (x, y) は求める領域の境界の点である.

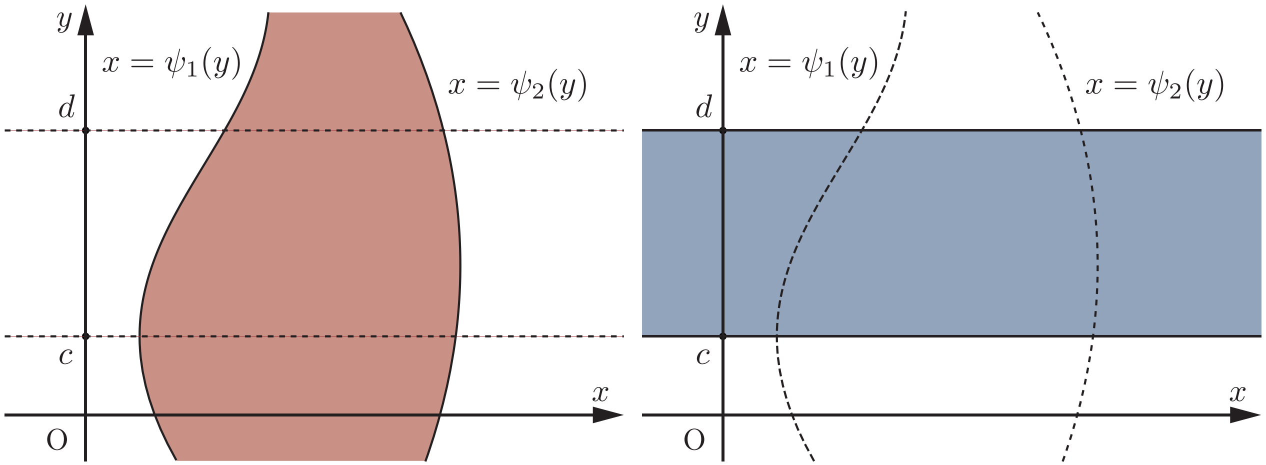
$$\to \begin{cases} x = a & \text{（左端の境界）} \\ x = b & \text{（右端の境界）} \end{cases}$$

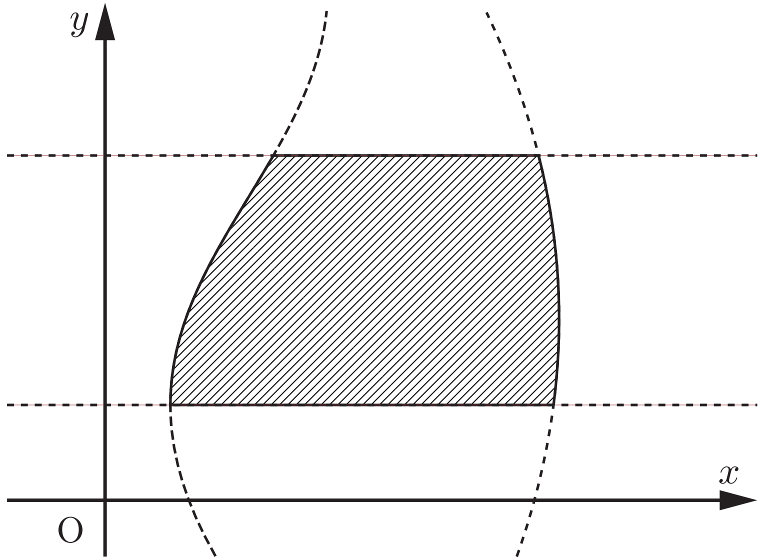
$$\to \begin{cases} y = \varphi_1(x) & \text{（下端の境界）} \\ y = \varphi_2(x) & \text{（上端の境界）} \end{cases}$$

積分領域

- $\displaystyle\int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$

  $\to$ $\boxed{\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)}$, $\boxed{c \leq y \leq d}$





領域 $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y),\, c \leq y \leq d$

- 前の例と同様，領域の境界は

$$\begin{cases} x = \psi_1(y) & \text{（左端の境界）} \\ x = \psi_2(y) & \text{（右端の境界）} \end{cases} \quad \text{と} \quad \begin{cases} y = c & \text{（下端の境界）} \\ y = d & \text{（上端の境界）} \end{cases} \quad \text{である．}$$