数学クォータ科目「数学」第４回 (1/3)

１変数関数の積分

佐藤 弘康　/ 日本工業大学 共通教育学群

不定積分

- 関数 $f(x)$ に対し, $\boxed{F'(x) = f(x)}$ を満たす関数 $F(x)$ のことを「$f(x)$ の原始関数」という.
- $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数ならば, 任意の定数 C を加えた関数 $F(x) + C$ も $f(x)$ の原始関数である.
  - なぜなら, 定数関数の微分は 0 だから, $F'(x) = f(x)$ ならば, $(F(x) + C)' = F'(x) + (C)' = f(x)$ である.
  - つまり, $f(x)$ の原始関数は一意には決まらず, 無数に存在する.
- $F(x) + C$ のことを「$f(x)$ の不定積分」とよび, $\boxed{\int f(x)\,dx}$ と書く;

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad (C\text{ を積分定数とよぶ})$$

- 不定積分とは「$f(x)$ の原始関数全体を表すもの」と解釈できる.

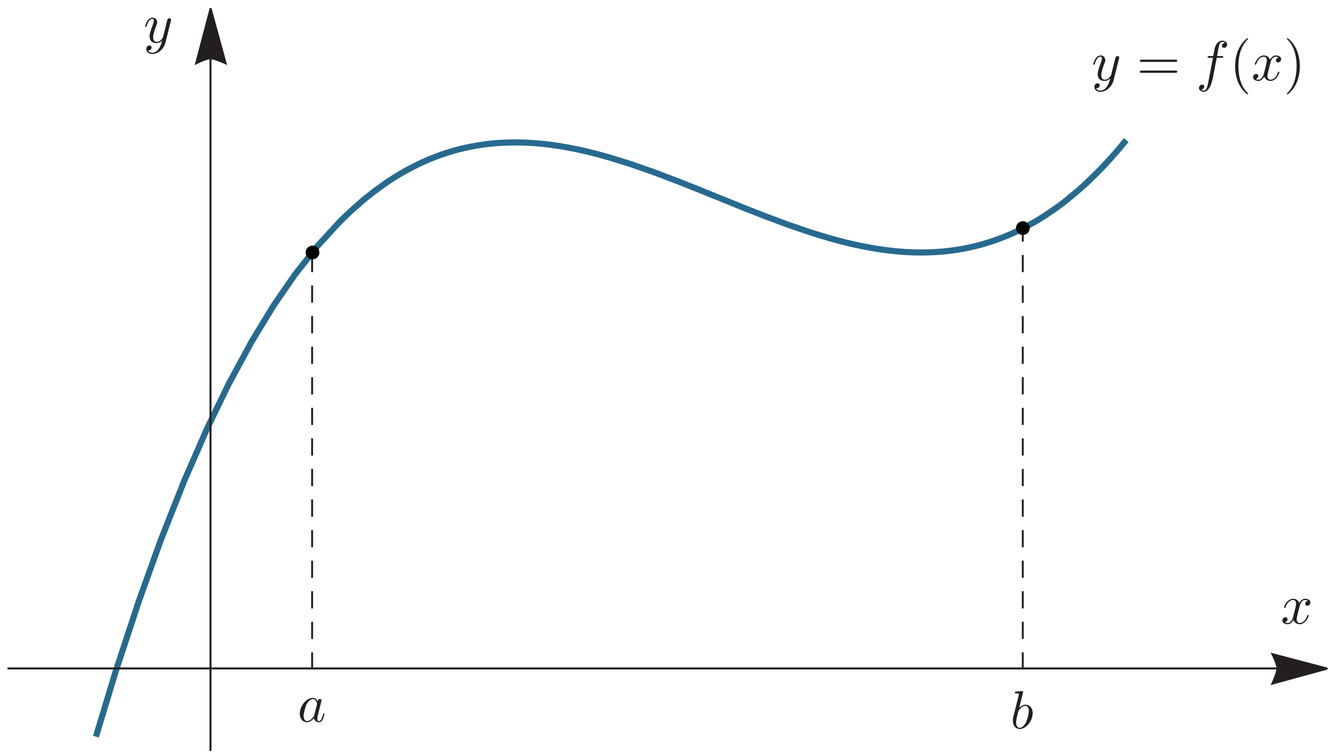
定積分

- $a \le x \le b$ で定義された関数 $f(x)$ に対し, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

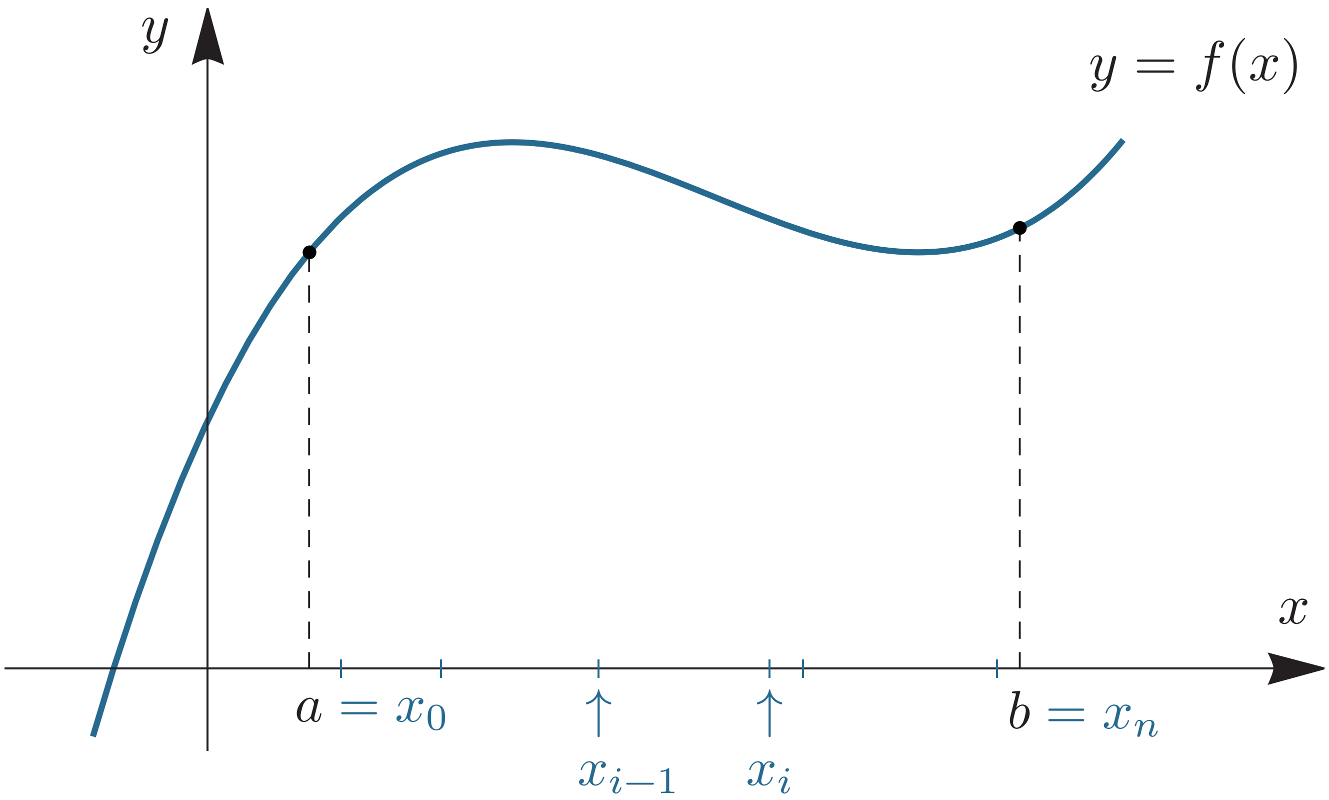
  と定める（ただし, $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数）.
  - 右辺の $F(b) - F(a)$ を $[F(x)]_a^b$ と表す.
  - $f(x)$ の原始関数は無数にあるが, $[F(x)]_a^b$ の値は一意的に定まる.
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を「関数 $f(x)$ の $x = a$ から $x = b$ までの定積分」という.
- 厳密には「リーマン和の極限」として定義される.

リーマン和



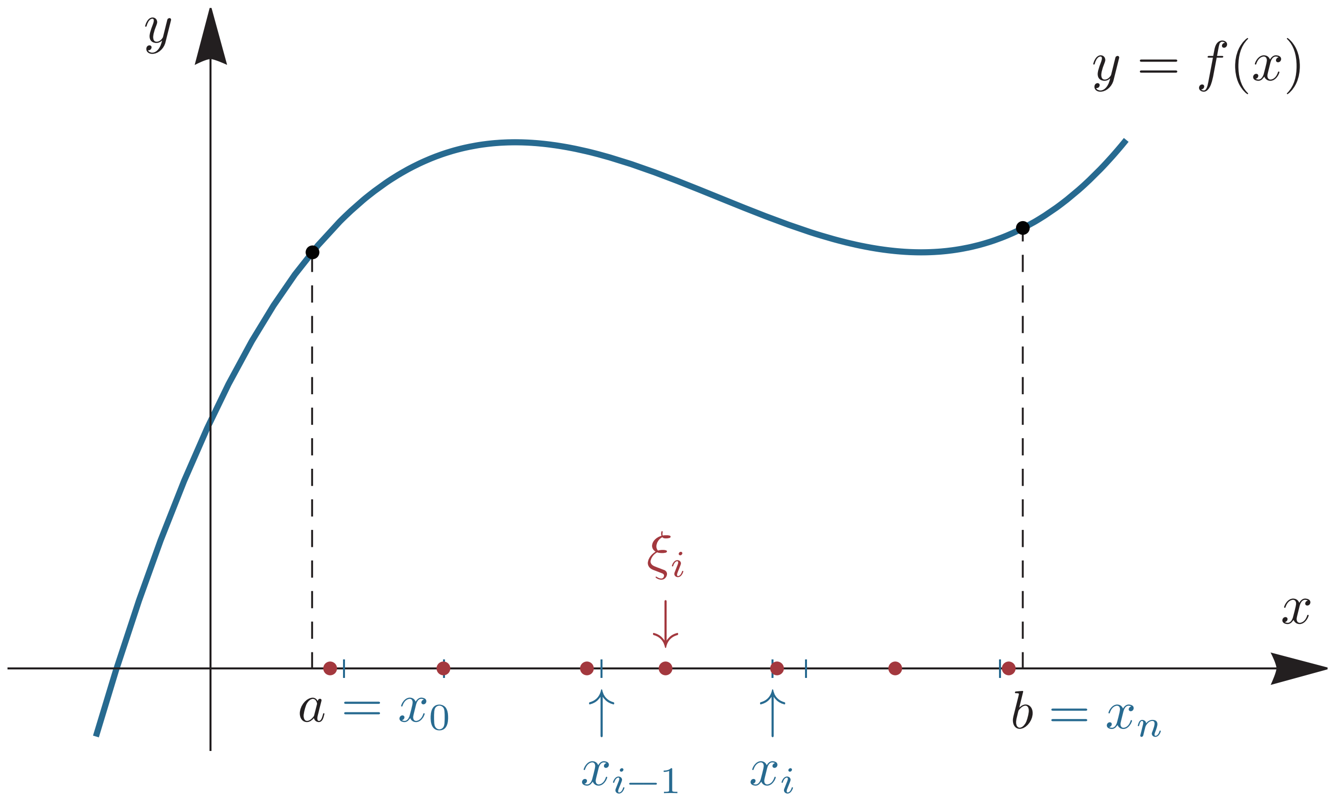
- 区間 $a \leq x \leq b$ で定義された有界な関数 $f(x)$ を考える.
  (つまり, $|f(x)| < K$ を満たす)

リーマン和



- 区間 $a \leq x \leq b$ を <u>n 個の小区間に分割</u>. つまり,
  - 区間内に $(n-1)$ 個の分点を選ぶ；$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$
  - このような大小関係をもつ点を「区間の分割」とよぶ（Δ と表す）.

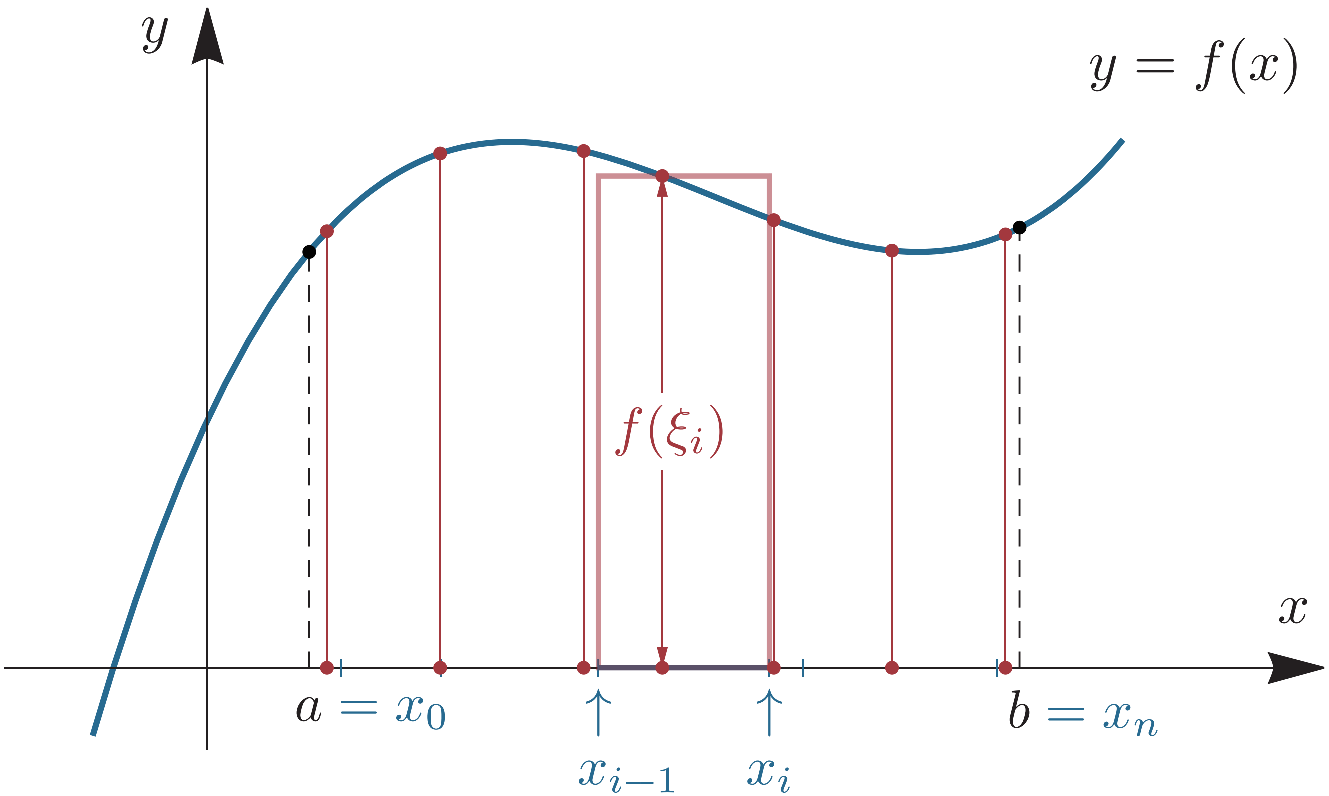
リーマン和



- 各小区間 $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ から $\underline{\xi_i}$ を適当に選ぶ（$x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i$）．
- 以上により定まる $R(\Delta; \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}) := \boxed{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})}$ を

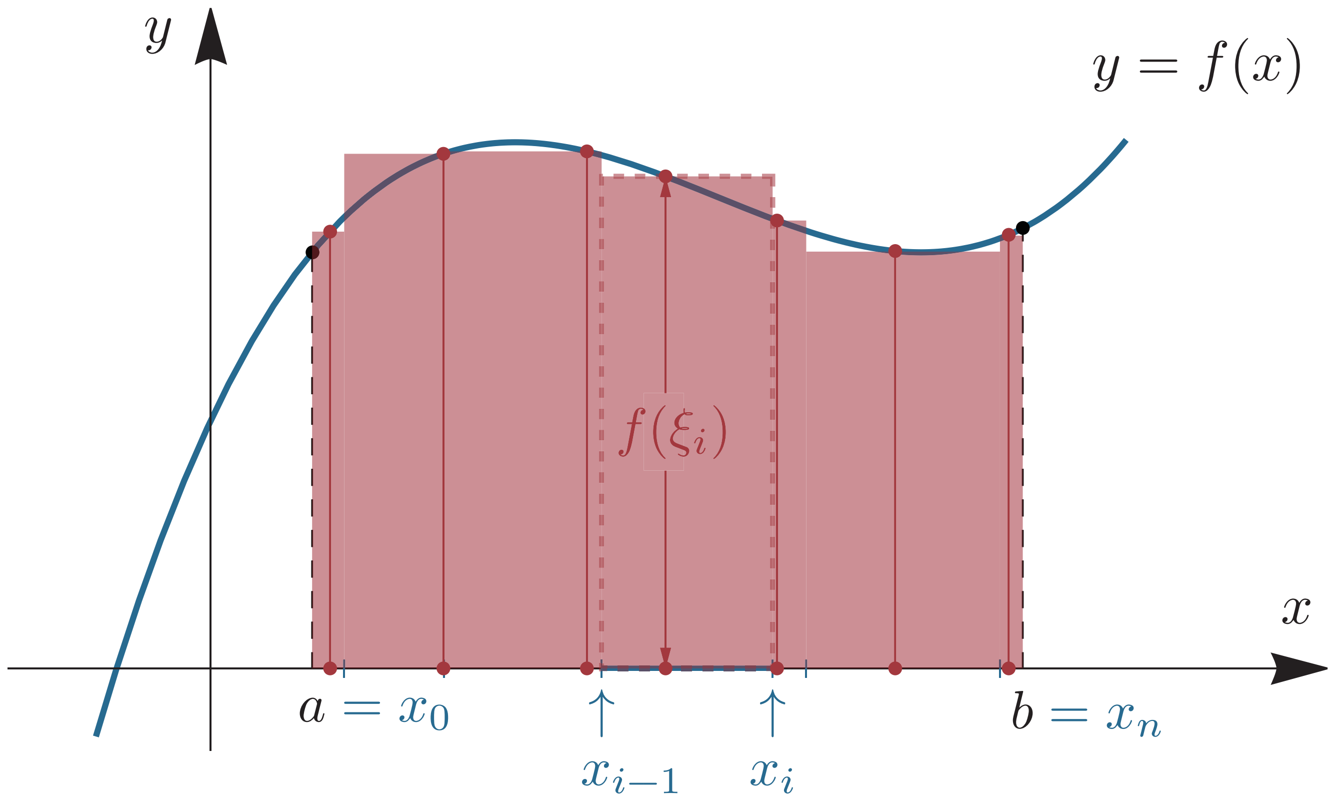
  リーマン和とよぶ.

リーマン和



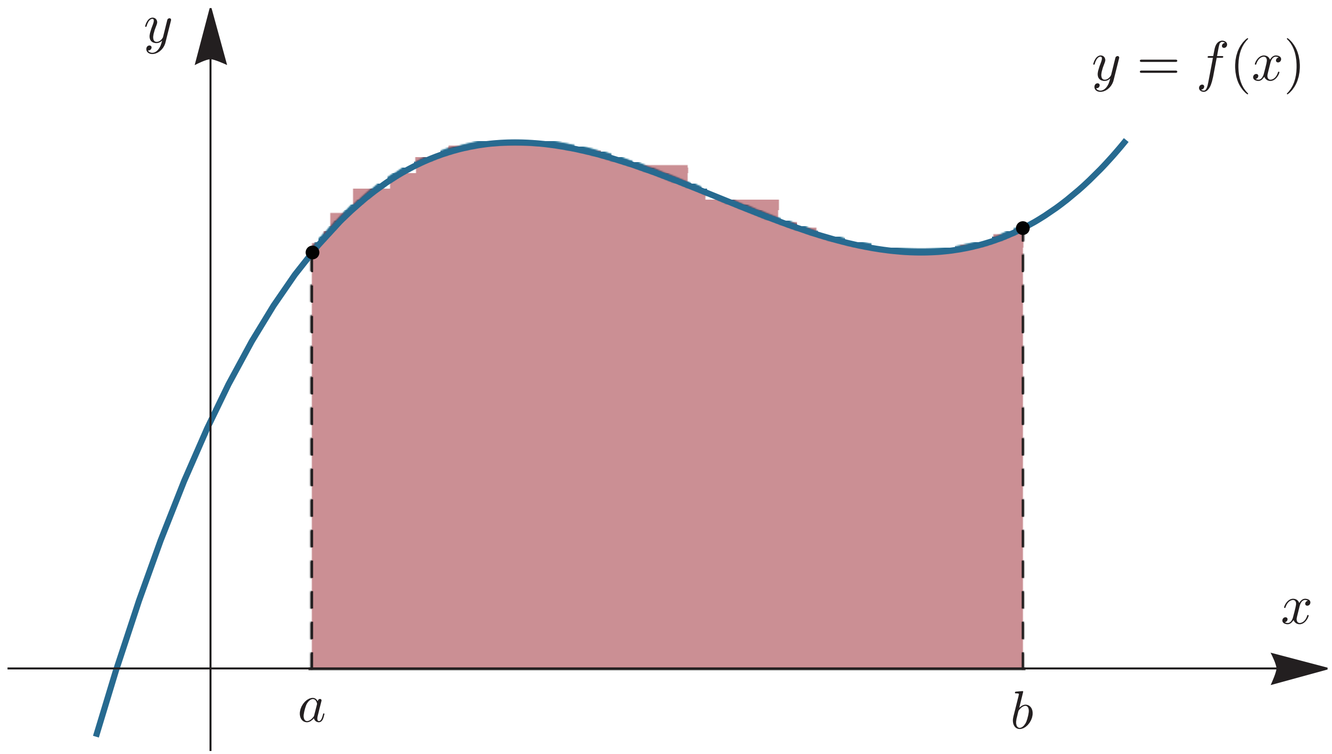
- リーマン和 $R(\Delta; \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ の意味は？
  - ○ (青) は小区間の幅なので, 右辺 $\sum$ 記号の中身は, 小区間を底辺とし, 高さが $f(\xi_i)$ の長方形の面積と解釈できる.

リーマン和



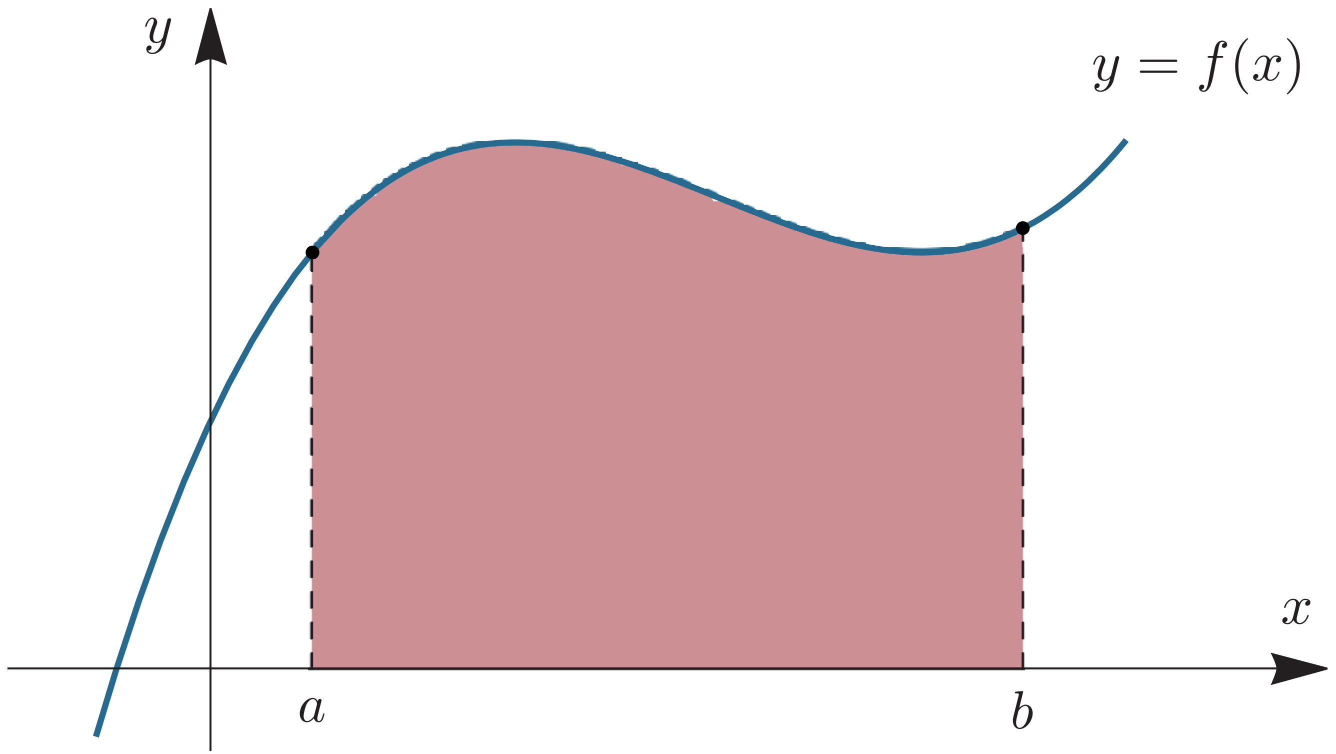
- リーマン和 $R(\Delta; \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ の意味は？
  - つまり, **関数 $y = f(x)$ のグラフ**と x 軸, 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた図形の面積を**長方形の面積の和で近似したもの**である.

リーマン和



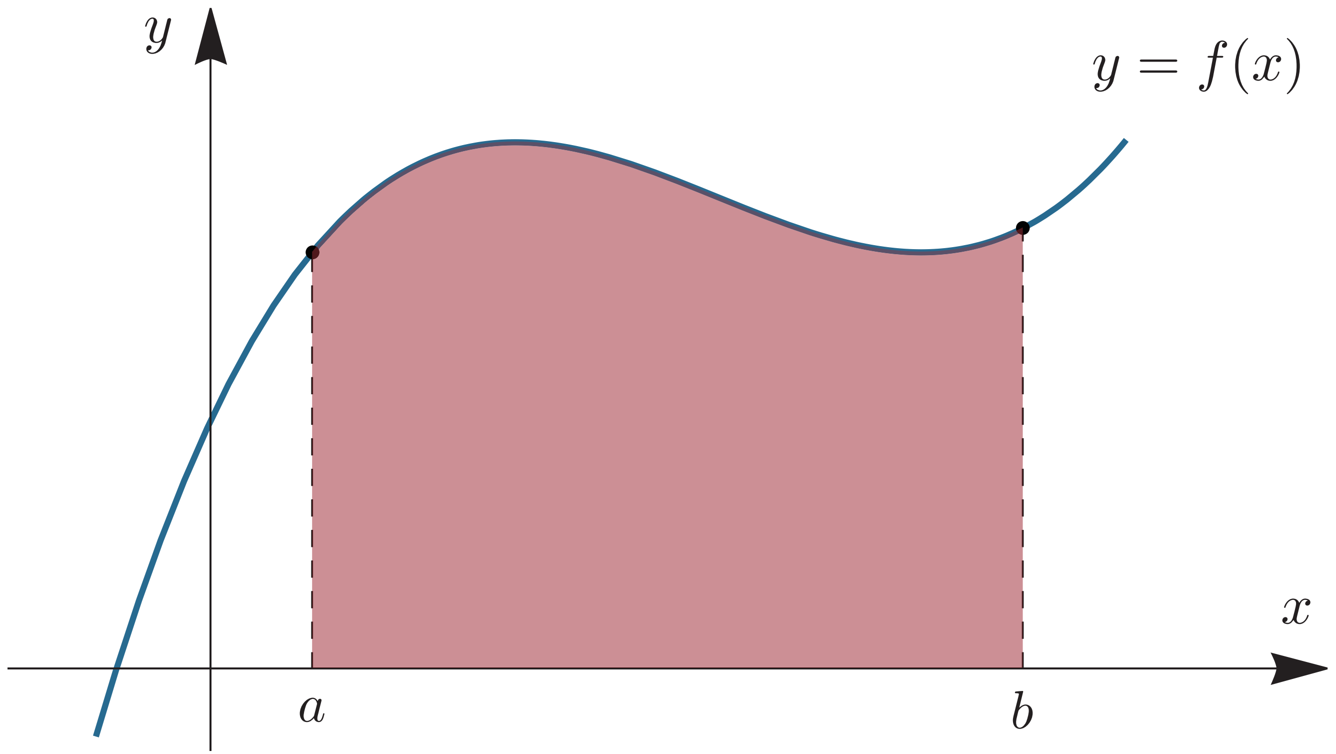
- この分割を細かくし, さらに分割の各小区間の横幅が 0 に近づくような極限をとる（これを $\|\Delta\| \to 0$ と表す）.
- ここで, 分割 Δ における小区間の幅の最大値 $\max_i (x_i - x_{i-1})$ を, 分割のノルムといい, $\|\Delta\|$ と表す.

リーマン和の極限としての定積分



- リーマン和の極限 $\displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0} R(\Delta; \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\})$ が分割 Δ と点 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ の選び方に依らずに一定値 I に収束するとする.
- このとき, I を「$f(x)$ の $[a, b]$ における定積分」とよび, $I = \boxed{\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx}$ と書く.

リーマン和の極限としての定積分



- $f(x) \geqq 0$ かつ連続関数ならば, 定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は, **関数 $y = f(x)$ のグラフ**と $\underline{x\text{ 軸}}$, 直線 $\underline{x = a}$, $\underline{x = b}$ で囲まれた図形の**面積**と解釈できる.

$\boxed{\text{問}}$ なぜ, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$ と計算できるのか？

微分積分学の基本定理

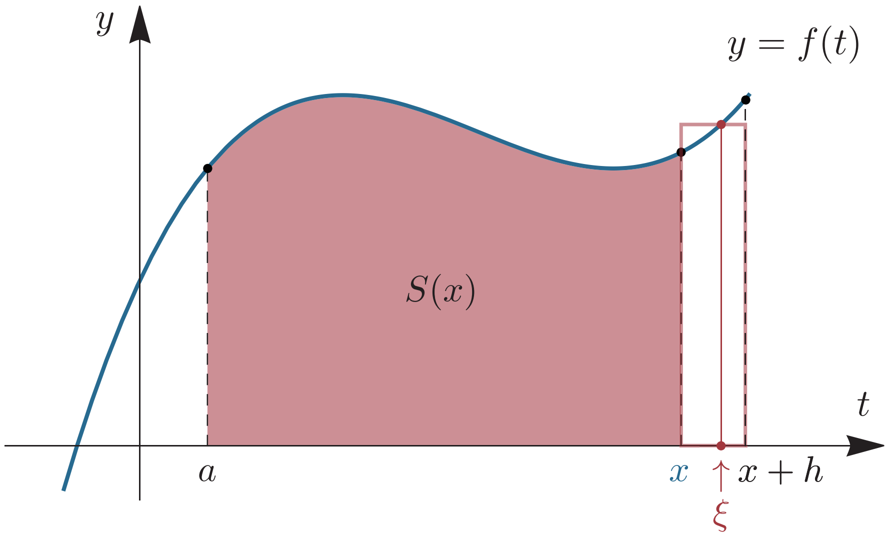
定理

$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ とおく．このとき，$S'(x) = f(x)$ が成り立つ．

（証明の概略） ※ものすごく大雑把

- 導関数とリーマン和の定義より，

$$S'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} \fallingdotseq \lim_{h\to 0} \frac{f(\xi)\,h}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi) = f(x).$$



※ 厳密には中間値の定理を用いて証明する．

定積分と不定積分の関係

- 微分積分学の基本定理 $S'(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ から，

  $S(x)$ は $f(x)$ の原始関数のひとつであることがわかる．

- つまり，$f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を用いて，$S(x) = F(x) + C$ と書ける．

- $S(a) = 0$ と定めると，$\underline{C = -F(a)}$ である．したがって，

$$\int_a^b f(x)\,dx = S(b) = F(b) + \underline{C} = F(b)\,\underline{-\,F(a)}$$

  となる．

- すなわち，$\boxed{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b}$