数学クォータ科目「数学」第 3 回 (2/2)

# ２変数関数の極値

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

# 【復習】1 変数関数の極値

**定理 1.**（教科書 p.68）

(i)「$f(x)$ が $x=a$ で極値をとる」ならば, $f'(a)=0$ が成り立つ.

(ii) $f'(a)=0$ かつ $\begin{cases} f''(a)<0 \\ f''(a)>0 \end{cases}$ ならば, $f(a)$ は $\begin{cases} \text{極大値} \\ \text{極小値} \end{cases}$ である.

$\boxed{\text{極値を求める手順}}$

(1) 導関数 $f'(x)$ を求める.

(2) 方程式 $f'(x)=0$ の解 $x=a$ を求める.

(3) 第２次導関数 $f''(x)$ を求める.

(4) (2) の解 $x=a$ に対して, $f''(a)$ の符号を調べる.

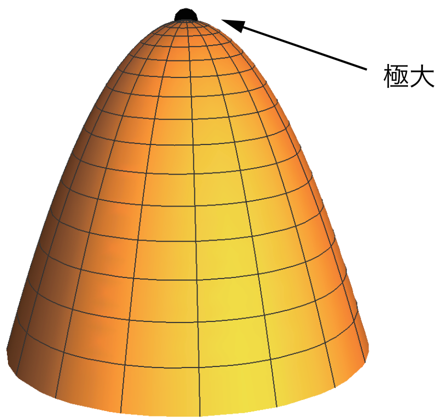
# 2 変数関数の極値

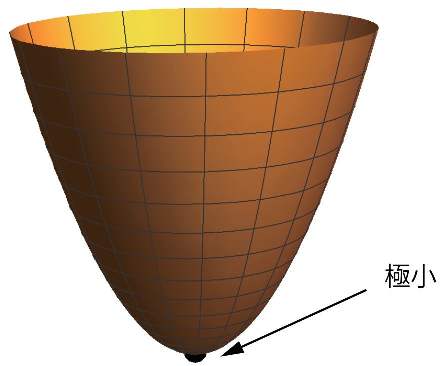
**定義（2 変数関数の極値）**

$f(a,b)$ が関数 $f(x,y)$ の $\left\{ \begin{array}{l} \text{極大値} \\ \text{極小値} \end{array} \right.$

$\Longleftrightarrow$ <u>十分小さい $h, k$※</u> に対し, $\left\{ \begin{array}{l} f(a,b) > f(a+h, b+k) \\ f(a,b) < f(a+h, b+k) \end{array} \right.$

※十分小さい $\varepsilon$ に対し, $0 \leq |h|, |k| < \varepsilon$ かつ $h, k$ のいずれか一方は $0$ でない.



# 2 変数関数の極値

**事実**

$f(a,b)$ が関数 $f(x,y)$ の $\begin{cases} \text{極大値} \\ \text{極小値} \end{cases}$

$\Longleftrightarrow$ 任意の $h,k$ に対し, $F(t) = f(a+ht, b+kt)$ は $t=0$ で $\begin{cases} \text{極大} \\ \text{極小} \end{cases}$

- 合成関数 $F(t) = f(a+ht, b+kt)$ の意味は,
  関数 $f(x,y)$ を $xy$-平面の直線 $(x,y) = (a+ht, b+kt)$ に制限すること.
- 直線 $(x,y) = (a+ht, b+kt) = (a,b) + t(h,k)$ は,
  点 $(a,b)$ を通り, ベクトル $(h,k)$ に平行な直線である.

# 2変数関数の極値（幾何学的な解釈）

**事実の幾何学的な解釈**

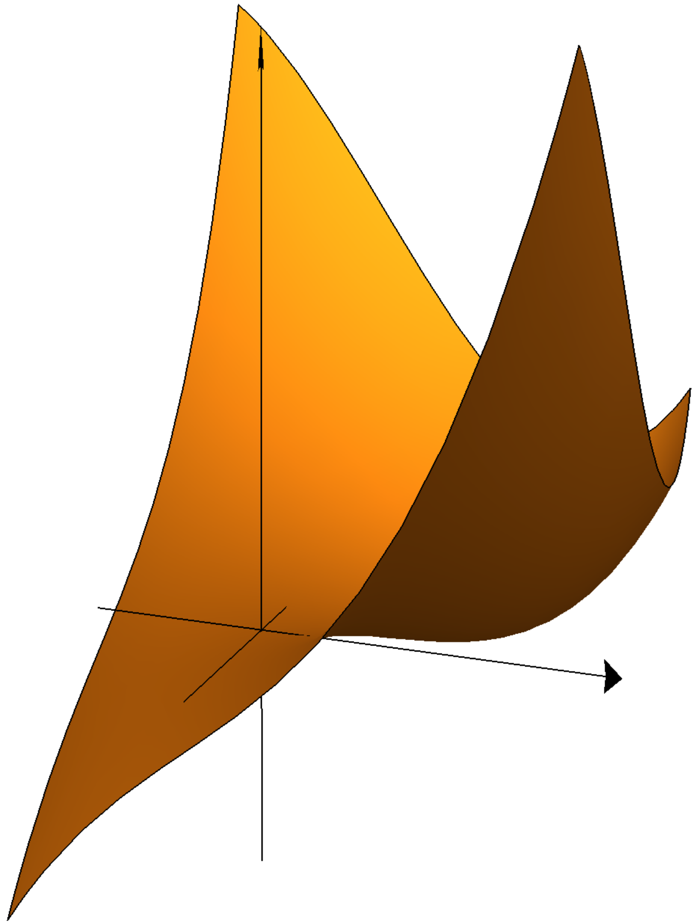
$f(a,b)$ が関数 $f(x,y)$ の $\begin{cases} \text{極大値} \\ \text{極小値} \end{cases}$

$\Longleftrightarrow$ 点 $(a,b)$ を通り, $xy$-平面に垂直な平面 で曲面 $z=f(x,y)$ を

切った切り口の曲線は, 常に 点 $(a,b)$ で $\begin{cases} \text{極大} \\ \text{極小} \end{cases}$

# ２変数関数の極値（幾何学的な解釈）

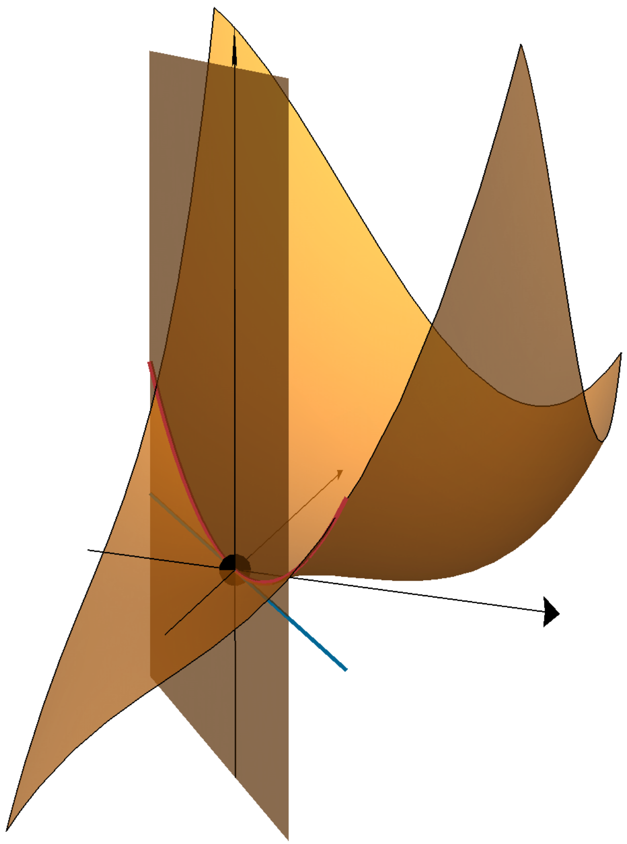
例）$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$（教科書 p.73 例 3. (1)）

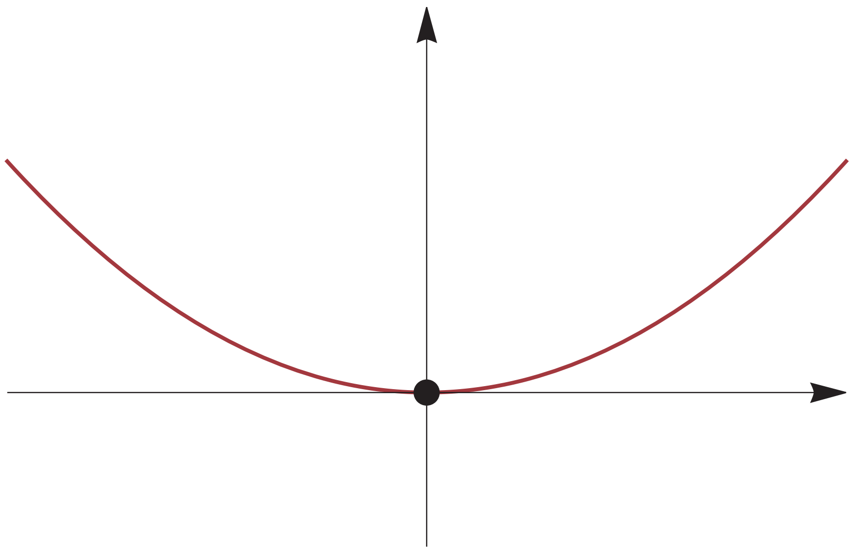


# ２変数関数の極値（幾何学的な解釈）

例）$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$（教科書 p.73 例 3. (1)）

○ 点 $(0, 0)$

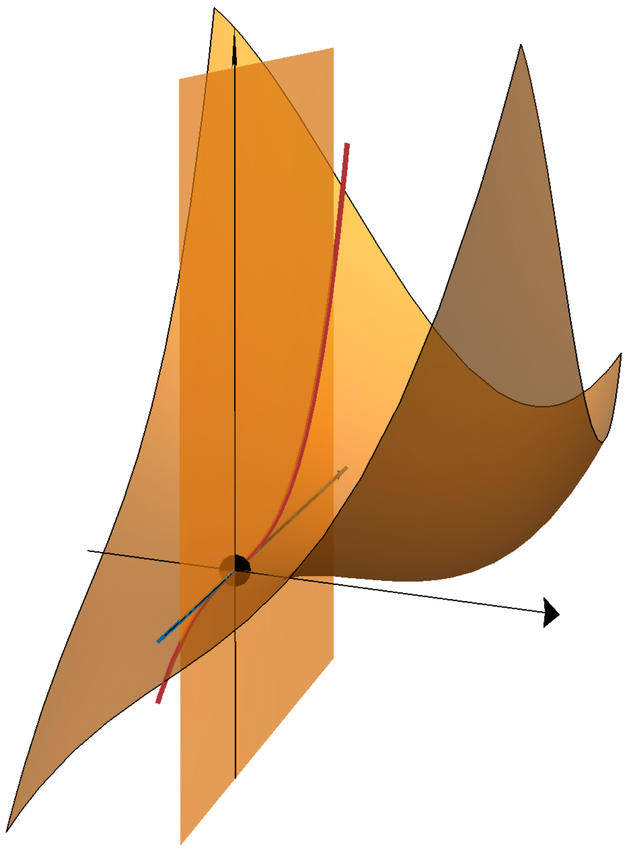


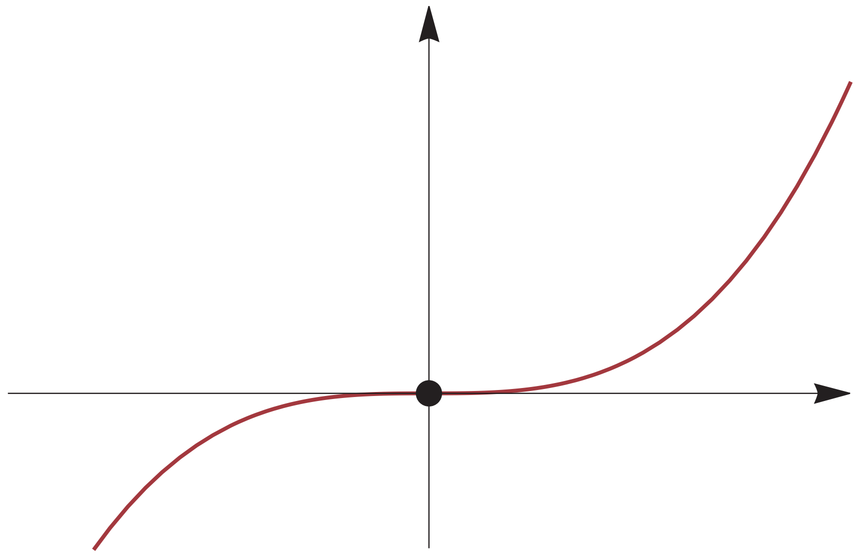


# ２変数関数の極値（幾何学的な解釈）

例）$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$（教科書 p.73 例 3. (1)）

- 点 $(0, 0)$

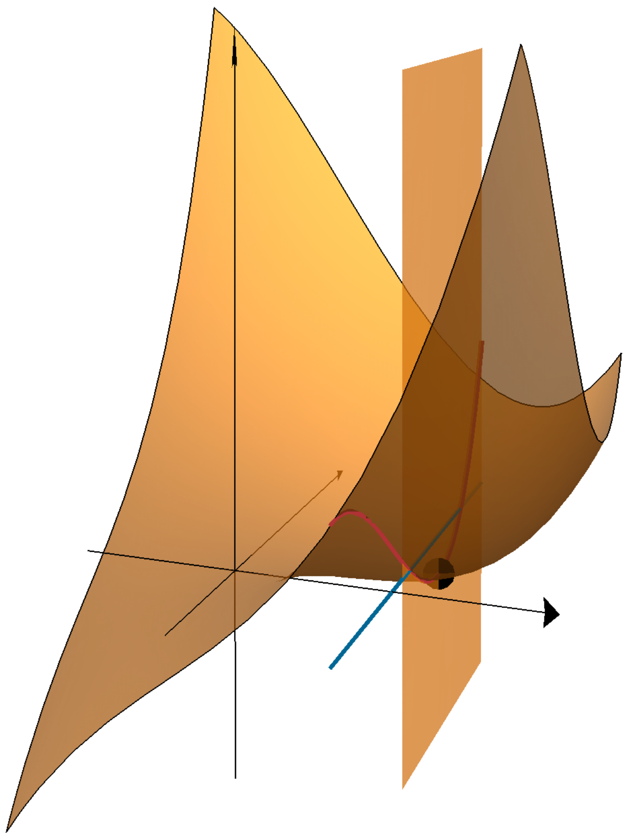


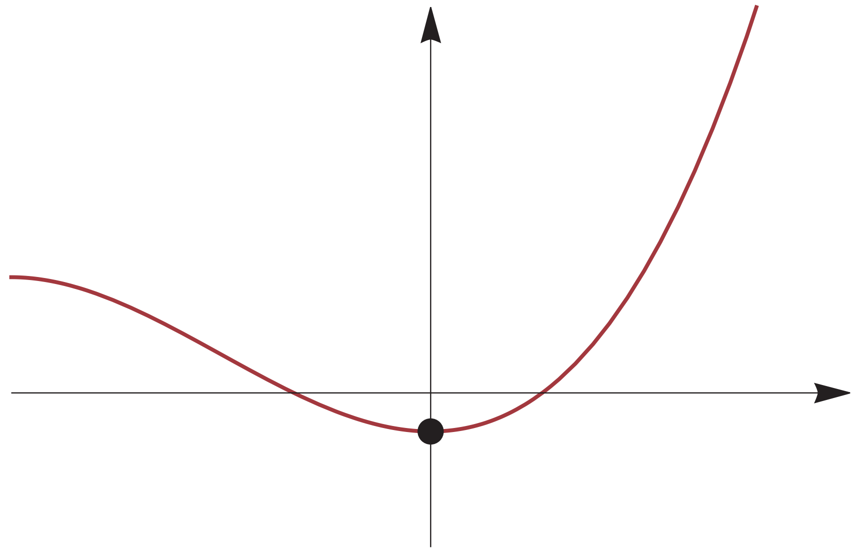


# ２変数関数の極値（幾何学的な解釈）

例）$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$（教科書 p.73 例 3. (1)）

- 点 $(1, 1)$

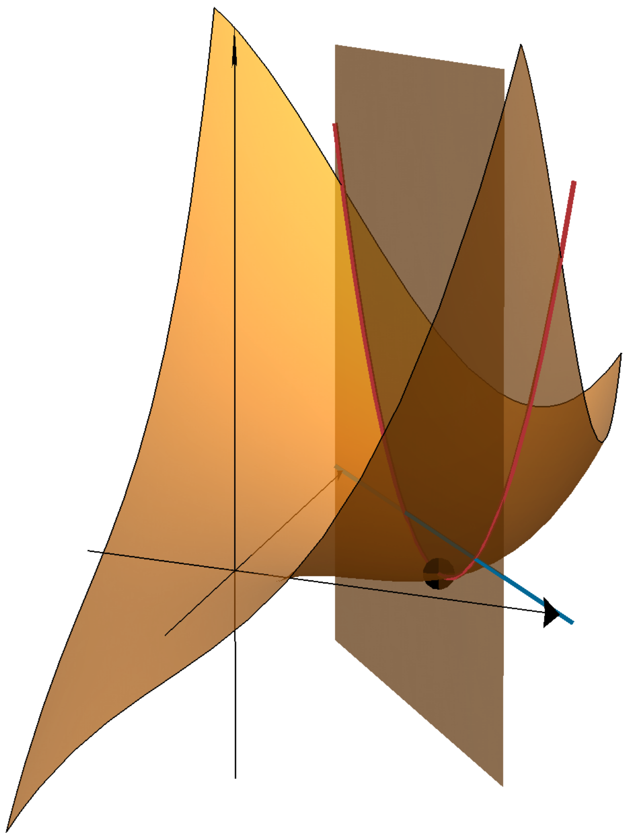


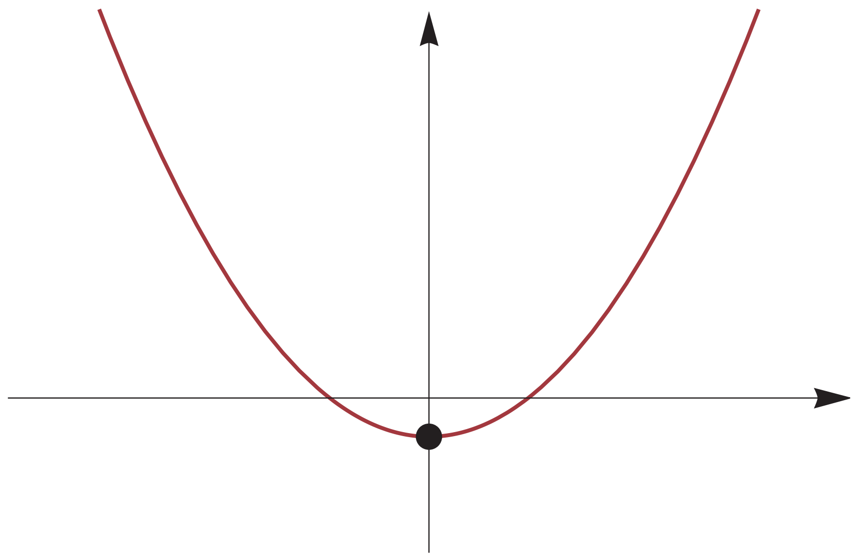


# ２変数関数の極値（幾何学的な解釈）

例）$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$（教科書 p.73 例 3. (1)）

- 点 $(1, 1)$





# ２変数関数の極値を求める（考え方）

**事実**

$f(a,b)$ が関数 $f(x,y)$ の $\begin{cases} \text{極大値} \\ \text{極小値} \end{cases}$

$\Longleftrightarrow$ $\underline{\text{任意の } h,k}$ に対し, $F(t)=f(a+ht,b+kt)$ は $t=0$ で $\begin{cases} \text{極大} \\ \text{極小} \end{cases}$

に

**定理 1.**（教科書 p.68）

(i) 「$f(x)$ が $x=a$ で極値をとる」ならば, $f'(a)=0$ が成り立つ.

(ii) $f'(a)=0$ かつ $\begin{cases} f''(a)<0 \\ f''(a)>0 \end{cases}$ ならば, $f(a)$ は $\begin{cases} \text{極大値} \\ \text{極小値} \end{cases}$ である.

を適用する.

# ２変数関数の極値を求める（考え方）

**定理 1. を【事実】に適用**

(I)「$f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で極値をとる」，
つまり, 任意の $h,k$ に対し, $F(t)$ が $t=0$ で極値をとるならば,
任意の $h,k$ に対し $F'(0)=0$ が成り立つ.

(II) 任意の $h,k$ に対し $F'(0)=0$ かつ $\begin{cases} F''(0)<0 \\ F''(0)>0 \end{cases}$ ならば,

$f(a,b)$ は $\begin{cases} \text{極大値} \\ \text{極小値} \end{cases}$ である.

**問** 条件：「任意の $h,k$ に対し, $F'(0)=0$ $F''(0)<0$ $F''(0)>0$ 」は,
$f(x,y)$ を用いて, それぞれどのように記述されるか？

# ２変数関数の極値を求める (I)

(I)

「$f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で極値をとる」,
つまり, 任意の $h,k$ に対し, $F(t)=f(a+ht,b+kt)$ が $t=0$ で極値をとるならば,
任意の $h,k$ に対し $F'(0)=0$ が成り立つ.

- 合成関数の微分の公式より,

$$F'(t)=f_x(a+ht,b+kt)\,h+f_y(a+ht,b+kt)\,k$$

$\Longleftrightarrow$ 任意の $h,k$ に対し, $f_x(a,b)\,h+f_y(a,b)\,k=0 \Longleftrightarrow f_x(a,b)=0$, かつ $f_y(a,b)=0$

# ２変数関数の極値を求める (II)

(II)

任意の $h, k$ に対し $F'(0) = 0$ かつ $\begin{cases} F''(0) < 0 \\ F''(0) > 0 \end{cases}$ ならば, $f(a, b)$ は $\begin{cases} \text{極大値} \\ \text{極小値} \end{cases}$

- 合成関数の微分の公式より,

$$F''(t) = f_{xx}(a+ht, b+kt)h^2 + 2f_{xy}(a+ht, b+kt)hk + f_{yy}(a+ht, b+kt)k^2$$

- よって,

$$\begin{aligned} F''(0) =& f_{xx}(a,b)h^2 + 2f_{xy}(a,b)hk + f_{yy}(a,b)k^2 \quad \text{（← 平方完成する）} \\ =& f_{xx}(a,b)\left\{\left(h + \frac{f_{xy}(a,b)}{f_{xx}(a,b)} \cdot k\right)^2 - \frac{\{f_{xy}(a,b)\}^2 - f_{xx}(a,b)\,f_{yy}(a,b)}{\{f_{xx}(a,b)\}^2} \cdot k^2\right\} \end{aligned}$$

# ２変数関数の極値を求める (II)

- $D(x,y) = \{f_{xy}(x,y)\}^2 - f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)$ とおくと,

$$F''(0) = f_{xx}(a,b)\left\{\left(h + \frac{f_{xy}(a,b)}{f_{xx}(a,b)}\cdot k\right)^2 - \frac{\{f_{xy}(a,b)\}^2 - f_{xx}(a,b)\,f_{yy}(a,b)}{\{f_{xx}(a,b)\}^2}\cdot k^2\right\}$$

$$= f_{xx}(a,b)\left\{(h \text{ と } k \text{ の式})^2 - D(a,b)\cdot(k \text{ の式})^2\right\}$$

- 条件 (II) 「任意の $h, k$ に対し, $F''(0)$ が定符号ならば, $f(a,b)$ は極値」
- $\boxed{\quad} \iff D(x,y) < 0$
- さらに, このときの $F''(0)$ の符号は, $f_{xx}(a,b)$ の符号と一致.

※ $D(a,b) > 0$ のときは, $h, k$ を適当にとることにより, $F''(0)$ の値を正にも負にもできる.

# 2変数関数の極値の判定

**定理 2.**（教科書 p.71,72）

I「 $f(x,y)$ が点 $(a,b)$ で極値をとる」ならば,

$f_x(a,b)=0$ かつ $f_y(a,b)=0$ が成り立つ.

II $D(x,y)=\{f_{xy}(x,y)\}^2 - f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)$

$f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0$ かつ

- $D(a,b)<0$ のとき,

$$\left\{\begin{array}{l} f_{xx}(a,b)<0 \\ f_{xx}(a,b)>0 \end{array}\right. \text{ならば, } f(a,b) \text{ は} \left\{\begin{array}{l} \text{極大値} \\ \text{極小値} \end{array}\right. \text{である.}$$

- $D(a,b)>0$ のとき, $f(a,b)$ は極値ではない.

# 2変数関数の極値の求め方

関数 $f(x,y)$ の極値を求めるには

(1) 偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求める.

(2) 連立方程式 $\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$ の解 $(x,y)=(a,b)$ を求める.

(3) 第２次偏導関数 $f_{xx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)$ を求める.

(4) $D(x,y)=\{f_{xy}(x,y)\}^2 - f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)$ を求める.

(5) (2) の解 $(x,y)=(a,b)$ に対して, $D(a,b)$ および $f_{xx}(a,b)$ の符号を調べる.

$$D(a,b)<0 \text{ かつ } \begin{cases} f_{xx}(a,b)<0 & \Longrightarrow f(a,b) \text{ は 極大値} \\ f_{xx}(a,b)>0 & \Longrightarrow f(a,b) \text{ は 極小値} \end{cases}$$

(6) 極値 $f(a,b)$ を計算する.

# ２変数関数の極値の求め方（判定方法）に関する注意

- $D(a,b) > 0$ ならば, $f(a,b)$ は極値ではない.
- $D(a,b) = 0$ のときは, 極値となる場合も, ならない場合もある.

- $F''(0) = f_{xx}(a,b)h^2 + 2f_{xy}(a,b)hk + f_{yy}(a,b)k^2$ を $k$ の２次式として平方完成すると

$$f_{yy}(a,b)\left\{\left(k + \frac{f_{xy}(a,b)}{f_{yy}(a,b)} \cdot h\right)^2 - \frac{\{f_{xy}(a,b)\}^2 - f_{xx}(a,b)\,f_{yy}(a,b)}{\{f_{yy}(a,b)\}^2} \cdot h^2\right\}$$

となる.

よって, $f_{xx}(a,b)$ の代りに $f_{yy}(a,b)$ の符号によって極大か極小かを判定してもよい.