数学クォータ科目「数学」第２回 (1/3)

関数のべき級数展開とは

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

べき級数とは

- 級数とは？

  → 数列 $\{a_n\}$ の各項を順に加えた式のこと.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

- べき級数とは？

  → 級数の各項が x のべき関数 $c_n x^n$ である級数のこと（c_n は定数）.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots .$$

事実

微分可能な関数 $f(x)$ は, x のべき級数として表すことができる.

べき級数の例

例）

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad (*)$$

この式が正しい（左辺と右辺が等しい）ことを２通りの方法で確認する.

（その１）数列の和

- $(*)$ の右辺は, 初項が 1 で公比が x の等比数列の和と解釈できる.
- よって, 第 n 項までの和は

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1 \times (1 - x^n)}{1-x} = \frac{1-x^n}{1-x}$$

- $n \to \infty$ のとき, x^n は $|x| < 1$ のとき, 収束する（極限値は 0）.

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1-0}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

べき級数の例

例）

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad (*)$$

この式が正しい（左辺と右辺が等しい）ことを２通りの方法で確認する.

（その２）式の展開

- $AB = 1 \iff \dfrac{1}{A} = B$ である.
- $A = 1 - x,\ B = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$ に対して, AB を展開する;

$$\begin{aligned} AB =& (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots) \\ =& 1(1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots) - x(1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots) \\ =& 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots - (x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n+1} + \cdots) = 1. \end{aligned}$$

- よって, $\dfrac{1}{A} = B$ となる.

べき級数の例

例）

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad (*)$$

注１ $x > 1$ のときは, $(*)$ は成立しないことがわかる.

$\because$ なぜなら, 左辺は負の数だが, 右辺は正の数であるから.

- 実際, $(*)$ が成立するのは, $-1 < x < 1$ の場合のみ.

注２ $0 < x < 1$ のとき, $(*)$ の右辺を有限個のところで止めたものを考えると, 真の値より小さく, 和の項の個数を増やしていけば, 真の値に近づいていく.

$$1 < 1 + x < 1 + x + x^2 < \ldots < \boxed{1 + x + x^2 + \ldots + x^n} < \frac{1}{1-x}$$

n 次近似多項式

今回のテーマ

- 【べき級数展開】

  微分可能な関数 $f(x)$ は, x のべき級数として表すことができる.

  - $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$

- 【収束半径】 ※これについて, 詳細にはふれません.

  ただし, べき級数として表せるのは, 限られた区間である.

  - 上の式は, $-1 < x < 1$ の区間でのみ成立する.

- 【近似多項式】

  べき級数を有限個のところで止めた多項式は, 元の関数の近似を与える.

  - $\dfrac{1}{1-x} \fallingdotseq 1 + x + x^2$