数学クォータ科目「数学」第 1 回 (2/4)

偏微分

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

【復習】１変数関数の微分

- 関数 $y = f(x)$ の $x = a$ における **微分係数** とは, 数

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

  のこと.　　グラフ上の２点 $(a, f(a)), (b, f(b))$ を通る直線の傾き

- $f'(a)$ は, $y = f(x)$ のグラフの点 $(a, f(a))$ における**接線の傾き**である.
- 上の極限が存在するとき,「$y = f(x)$ は $x = a$ で**微分可能**である」という.
- $y = f(x)$ の **導関数** とは, x に対して $f'(x)$ を対応させる関数のこと;

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

  - 記号：$f'(x), \quad y', \quad \dfrac{df}{dx}(x), \quad \dfrac{dy}{dx}$
  - 導関数を求めることを,「関数を**微分する**」という.

2変数関数の偏微分

- 2変数関数 $z = f(x, y)$ の **偏導関数** とは，2つの変数のうち一方を定数と見なして，もう一方の変数に関して微分した関数のこと．
- 「x に関する偏導関数」
  - y を定数とみなして，x で微分した関数
  - 記号：$f_x(x, y), \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad z_x, \quad \dfrac{\partial z}{\partial x}$
- 「y に関する偏導関数」
  - x を定数とみなして，y で微分した関数
  - 記号：$f_y(x, y), \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y), \quad z_y, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}$
- 記号 ∂ は，筆記体の d が元．読み方：「デル」「ラウンドディー」など．
- 偏導関数を求めることを「関数を偏微分する」という．

偏微分の計算

- 一方の変数を定数とみなして, 他方の変数に関して微分するだけなので, 1 変数関数の微分の公式・法則が適用できる.
- $(t^\alpha)' = \alpha\, t^{\alpha-1}$, $(\sin t)' = \cos t$, $(\cos t)' = -\sin t$, $(e^t)' = e^t$, $(\log t)' = \dfrac{1}{t}$, ...
- 関数 $f(t), g(t)$ と定数 k に対し,

(1) $\dfrac{d}{dt}(f(t) \pm g(t)) = \dfrac{df}{dt}(t) \pm \dfrac{dg}{dt}(t)$, $\quad \dfrac{d}{dt}(k\,f(t)) = k\,\dfrac{df}{dt}(t)$

ここで, $\dfrac{d}{dt}(\cdots)$ は, 「括弧内の関数を t の関数と思って微分せよ」という意味.

(2) 積の微分の公式 : $\dfrac{d}{dt}(f(t) \cdot g(t)) = \dfrac{df}{dt}(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot \dfrac{dg}{dt}(t)$

(3) 商の微分の公式 : $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{f(t)}{g(t)}\right) = \dfrac{\frac{df}{dt}(t) \cdot g(t) - f(t) \cdot \frac{dg}{dt}(t)}{g(t)^2}$

(4) 合成関数の微分

偏微分の計算例

次の関数を偏微分しなさい．（← ２つの偏導関数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ を求める）

例１）$f(x,y) = x^2 + y^2$

解　$f_x(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2) + \dfrac{\partial}{\partial x}(y^2) = 2x^{2-1} + 0 = 2x.$　ここで，$\dfrac{\partial}{\partial x}(\cdots)$ は，「括弧内の関数を x に関して偏微分せよ」という意味．同様に，$f_y(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) = \dfrac{\partial}{\partial y}(x^2) + \dfrac{\partial}{\partial y}(y^2) = 0 + 2y^{2-1} = 2y.$

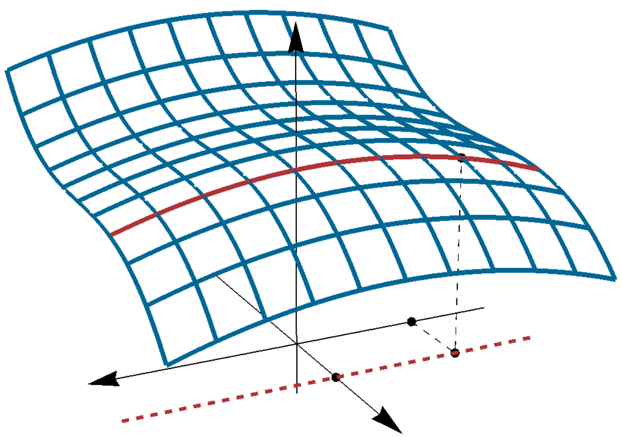
例２）$f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$

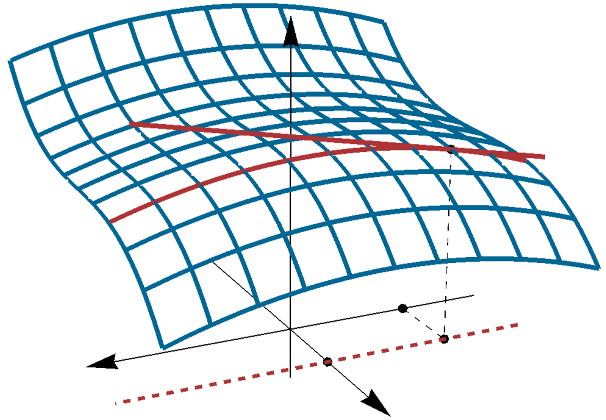
解　$f_x(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) = -\dfrac{\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = -\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2}$.$f_y(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) = -\dfrac{\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = -\dfrac{2y}{(x^2+y^2)^2}.$

偏導関数の厳密な定義

- １変数関数の導関数と同様, 極限を用いて定義される.
- 関数 $f(x, y)$ の定義域内の点 (a, b) に対し,
  $y = b$ に固定して得られる１変数関数 $\varphi(x) = f(x, b)$ の $x = a$ における微分係数を, 点 (a, b) における x に関する偏微分係数という.

$$f_x(a, b) = \varphi'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h} = \boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}}$$

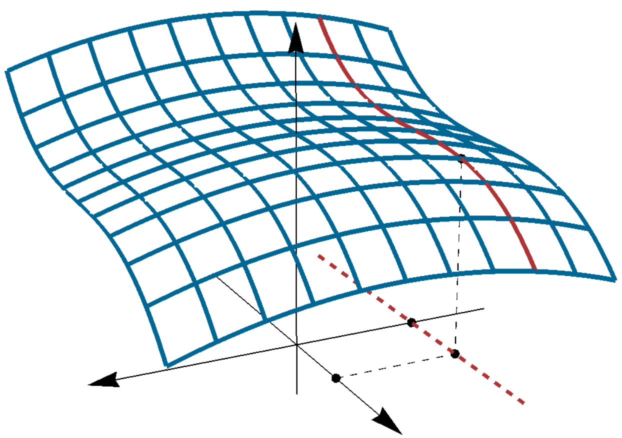


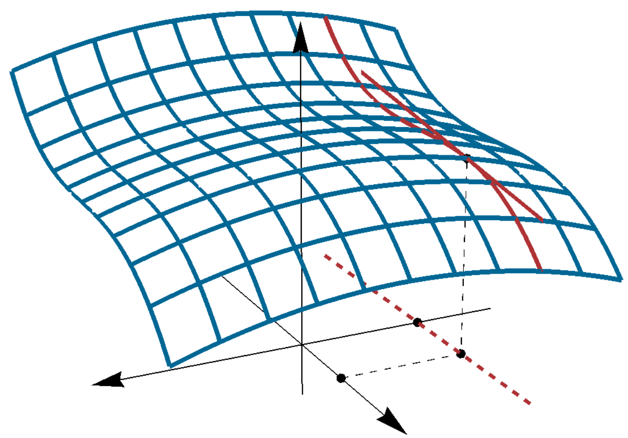


偏導関数の厳密な定義

- 関数 $f(x,y)$ の定義域内の点 (a,b) に対し,
  $x=a$ に固定して得られる１変数関数 $\psi(x)=f(a,y)$ の $y=b$ における微分係数を, 点 (a,b) における y に関する偏微分係数という.

$$f_y(a,b)=\psi'(b)=\lim_{h\to 0}\frac{\psi(b+h)-\psi(b)}{h}=\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}}$$





- $f_x(a,b)$, $f_y(a,b)$ が存在するとき,「点 (a,b) で偏微分可能である」という.