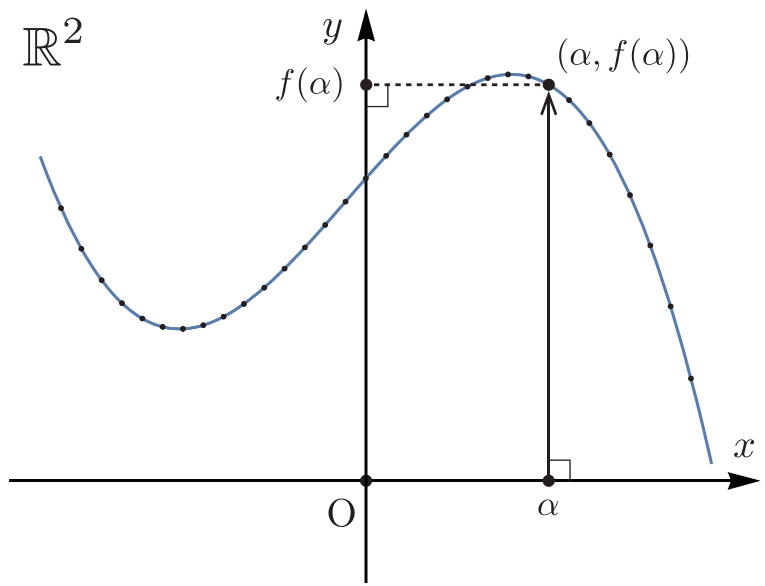
数学クォータ科目「数学」第１回 (1/4)

２変数関数とそのグラフ

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

【復習】１変数関数とそのグラフ

- ２つの変数 x, y があり，変数 x の値を決めると，それに応じて y の値が決まるとき，「y は x の 関数 である」という．
  - x を独立変数，y を従属変数という．
  - 特に，独立変数が１つであることから，１変数関数という．
  - 独立変数がとる値の範囲のことを定義域という．
  - y が独立変数 x の関数であることを，一般的に $y = f(x)$ と書く．
- 関数 $y = f(x)$ があるとき，定義域内の値 $x = \alpha$ に対して，平面内の点 $(\alpha, f(\alpha))$ が定まる．このような点 $(\alpha, f(\alpha))$ の全体を関数 $y = f(x)$ の グラフ という．
- １変数関数のグラフは，平面内の曲線となる．



２変数関数とは（１）

- ３つの変数 x, y, z がある.
- 変数 x と y の値を決めると, それに応じて z の値が決まるとき,

「z は x, y の **２変数関数** である」

という. このとき, $\begin{cases} x, y & \text{を独立変数} \\ z & \text{を従属変数} \end{cases}$ という.

- 変数 z が独立変数 x, y の関数であることを, 一般的に $\boxed{z = f(x, y)}$ と書く.
  - f は「x, y に対して, $z(= f(x, y))$ を対応させる規則」.
  - 「x, y の関数」とは「x, y で記述される式 $f(x, y)$」.

２変数関数とは（２）

- ３つの変数 x, y, z がある.
- 変数 x, y を xy-平面内の点の座標 (x, y) と考える.
- このとき, ２変数関数とは,

「平面の点 $\mathrm{P}(x, y)$ に対して, 数 $f(x, y)$ を対応させること」

と考えることができる（ $z = f(\mathrm{P})$ と書くこともある）.

2 変数関数の定義域と値域

関数 $z = f(x, y)$ に対し,

- 変数 x, y のとる値の範囲（点 (x, y) が動きうる領域）のことを,
  「関数 $f(x, y)$ の 定義域 」という.
- 関数 $f(x, y)$ の定義域は平面内の領域である.

- 点 (x, y) を関数 $f(x, y)$ の定義域内の点とするとき,
  z がとる値の範囲のことを「関数 $f(x, y)$ の 値域 」という.

２変数関数の例（１）

例１） $f(x,y) = x^2 + y^2$

- 定義域は，平面全体 $\mathbb{R}^2$ としてよい．
- 任意の実数 k に対し $k^2 \geq 0$ だから，$f(x,y) \geq 0$．
  よって，値域は 0 以上の実数全体 $z \geq 0$ である．

例２） $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

- $(x,y) = (0,0)$ のとき, $f(x,y) = \dfrac{1}{0}$ となり，値が定まらない．
  よって，定義域は 平面全体から原点を除いた領域となる．
- $(x,y) \neq (0,0)$ ならば，$x^2 + y^2 > 0$ なので，$\dfrac{1}{x^2 + y^2} > 0$ である．
  よって，値域は 0 より大きい実数全体 $z > 0$ である．

２変数関数の例（２）

例３） $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

- 平方根の中は 0 以上でなくてはならない．つまり，(x, y) は

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0$$

を満たす必要がある．この方程式は $x^2 + y^2 \leq 1$ と変形でき，これは半径 1 の円周とその内部を表す．これが定義域である．

- $x^2 + y^2 \geq 0$ より，$-(x^2 + y^2) \leq 0$．よって，

$$\sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \leq \sqrt{1} = 1$$

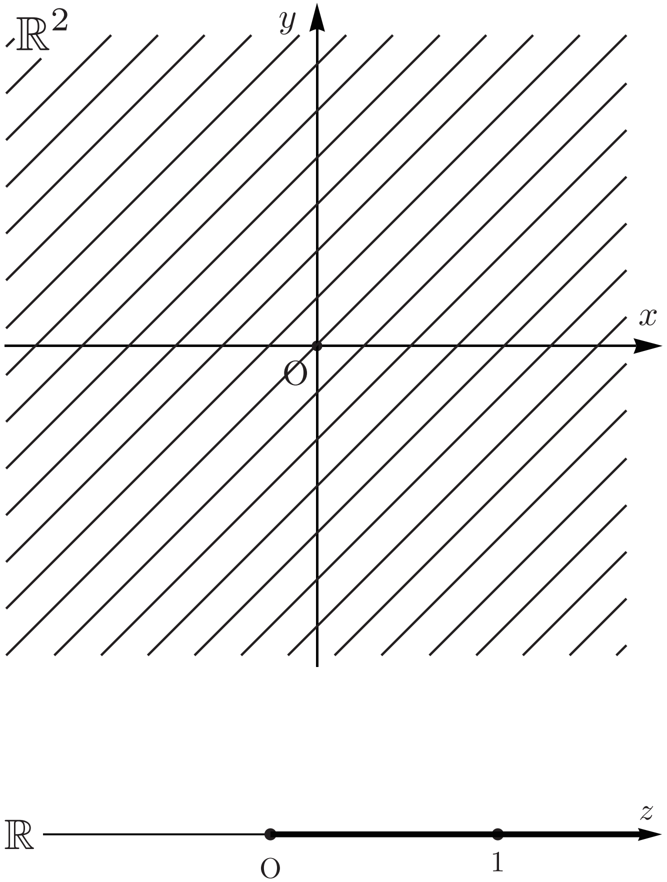
が成り立つ．一般に $\sqrt{k} \geq 0$ なので，$\sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \geq 0$ である．

よって，値域は 0 以上 1 以下の実数全体 $0 \leq z \leq 1$ である．

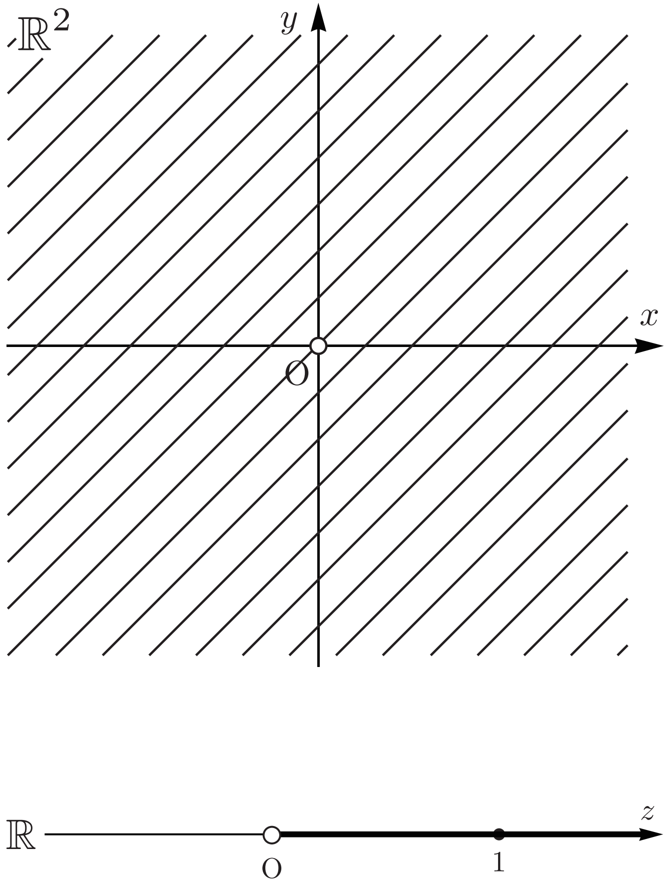
２変数関数の例（３）

例１）〜３）の関数の定義域と値域

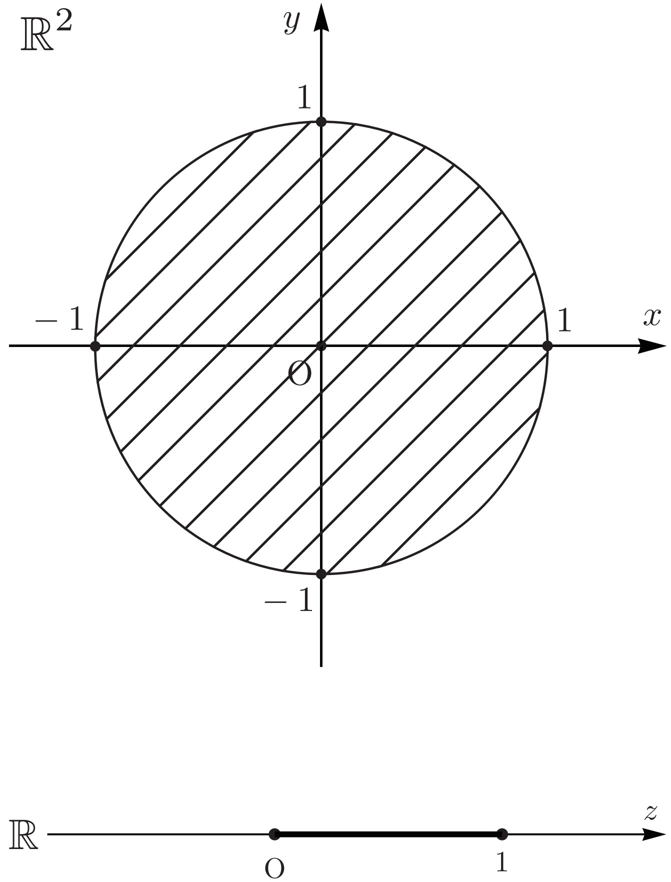
例１）$f(x, y) = x^2 + y^2$



例２）$f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

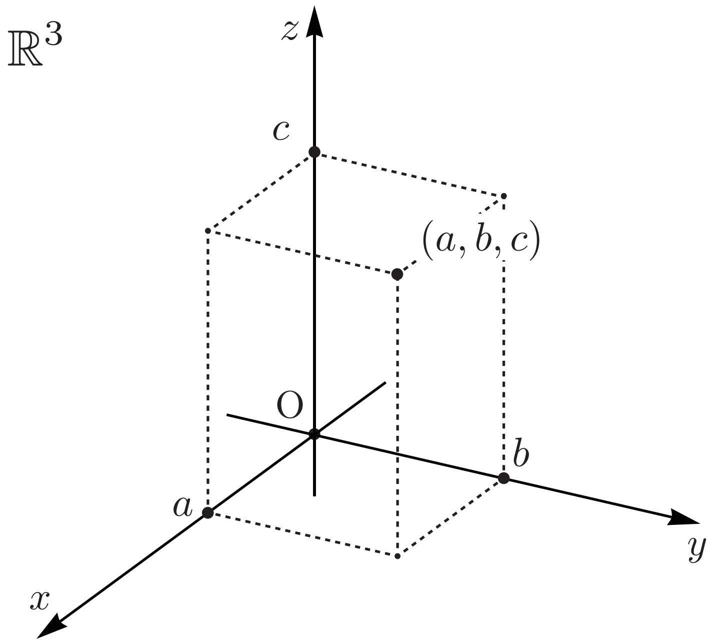


例３）$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

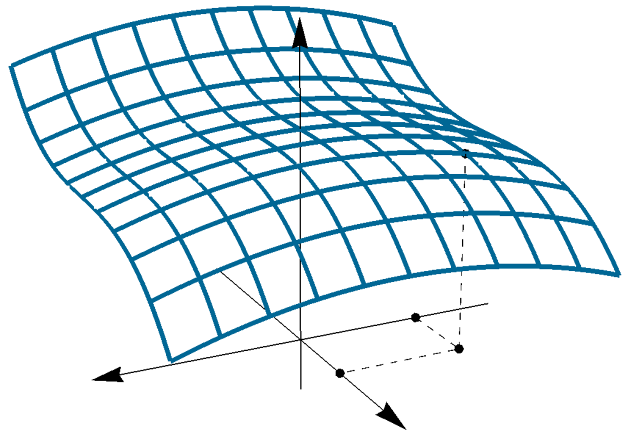


２変数関数のグラフ

- 関数 $z = f(x, y)$ があると，定義域内の点 $(x, y) = (a, b)$ に対し，空間内の点 $(a, b, f(a, b))$ が定まる．
- このような点の全体を $z = f(x, y)$ の グラフ という（空間内の曲面）．
- $z = f(x, y)$ のグラフを「土地の地形」とみなすと，$f(a, b)$ の値は (a, b) 地点の標高と解釈できる．



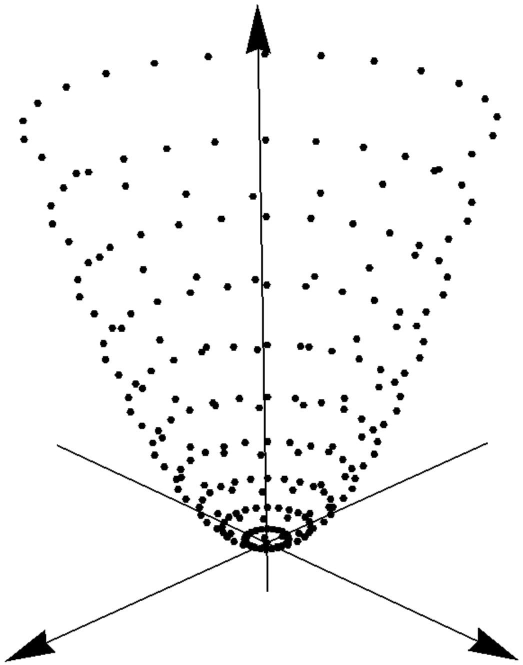
空間の直交座標系

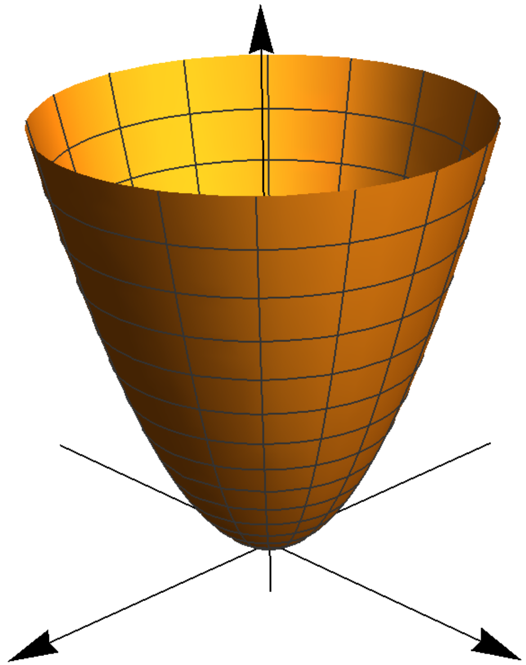


２変数関数のグラフ

２変数関数のグラフの例（１）

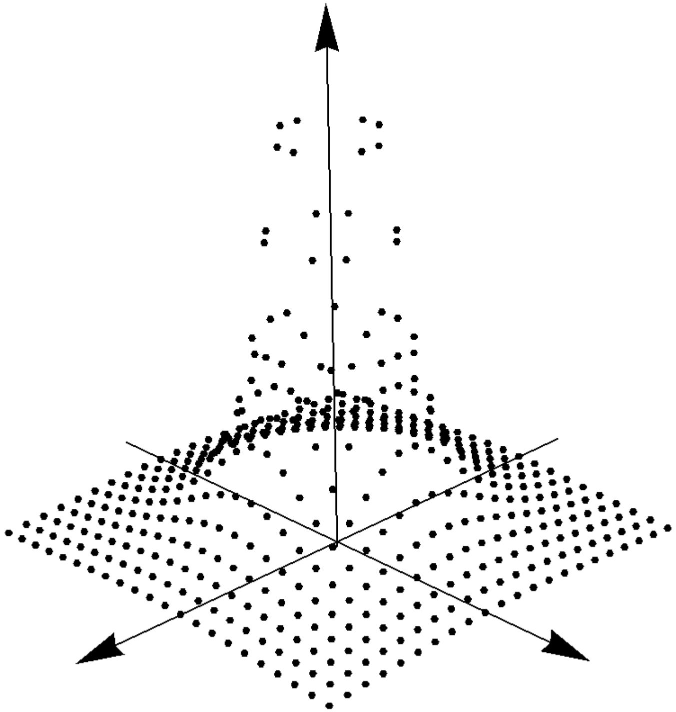
例１） $f(x, y) = x^2 + y^2$

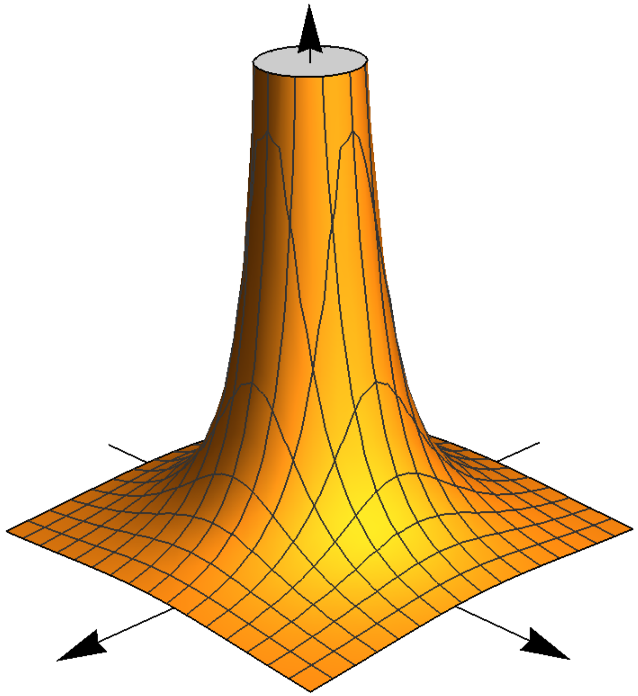




２変数関数のグラフの例（２）

例２） $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$





２変数関数のグラフの例（３）

例３）$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$