科 目 名 微分積分学 III 出 題 者 名 佐藤 弘康

1 次の文中の (1)〜(5) に当てはまる最も適切なものを下の選択肢から選び，丸で囲みなさい．【各 1 点】

平面内の領域 D の点 (x,y) に対し，実数 $z=f(x,y)$ が対応するとき，f を D 上の 2 変数関数といい，D を f の $\boxed{(1)}$ という．点 (x,y) が D 内を動くとき，z が取り得る値の範囲を f の $\boxed{(2)}$ という．$\boxed{(1)}$ が明示的に与えられていない場合は，f が定義可能な点 (x,y) の全体の集合を $\boxed{(1)}$ と考えることとする．

2 変数関数

$$f(x,y)=\sqrt{3-x^2-y^2}$$

の $\boxed{(1)}$ は原点を中心とする半径 $\boxed{(3)}$ の円の $\boxed{(4)}$ であり，$\boxed{(2)}$ は $\boxed{(5)}$ である．

(選択肢)

(1) 区間 ・ 始域 ・ 終域・ 値域 ・ 定義域

(2) 区間 ・ 始域 ・ 終域・ 値域 ・ 定義域

(3) 1 ・ $\sqrt{3}$ ・ 3 ・ 9

(4) 内部 ・ 内部と円周 ・ 外部 ・ 外部と円周 ・ 円周

(5) 実数全体 ・ 正の実数全体 ・ $0\leqq z\leqq\sqrt{3}$
$0\leqq z\leqq 3$ ・ $z\geqq\sqrt{3}$ ・ $z\geqq 3$

(1) 定義域 (2) 値域 (3) $\sqrt{3}$ (4) 内部と円周
(5) $0\leqq z\leqq\sqrt{3}$

2 極限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

を求めなさい．【4 点】

$f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ とおく．単に $x=y=0$ を代入すると，$f(0,0)=\frac{0}{0}$ となり，これは不定形である．そこで，$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ と極表示して考える．このとき，$(x,y)\to(0,0)$ は $r\to 0$ と同値である．

$$f(r\cos\theta,r\sin\theta)=\cos 2\theta$$

より，これは θ にのみ依存することがわかる．よって，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{r\to 0}\cos 2\theta$$

は極限値を持たない（発散する）．

3 点 $(1,-1,a)$ と $(-2,b,-4)$ はともに関数

$$z=x^3-2xy-y^2$$

のグラフ（曲面）上の点であるとする．このとき，a と b の値を求めなさい．【4 点】

$a=f(1,-1)=1+2-1=\underline{2}$.
一方，$-4=f(-2,b)=-8+4b-b^2$ であるから，これを整理すると

$$b^2-4b+4=0 \iff (b-2)^2=0$$

となり，$\underline{b=2}$を得る．

4 次の関数 $f(x,y)$ について，2 次までの偏導関数をすべて求めなさい．【各 5 点】

(1) $f(x,y)=x^3-2xy^2+3y^3$

$$f_x(x,y)=3x^2-2y^2$$
$$f_y(x,y)=-4xy+9y^2$$
$$f_{xx}(x,y)=6x$$
$$f_{xy}(x,y)=-4y$$
$$f_{yy}(x,y)=-4x+18y$$

【各 1 点】

(2) $f(x,y)=\sin(x+y)$

$$f_x(x,y)=f_y(x,y)=\cos(x+y),$$
$$f_{xx}(x,y)=f_{xy}(x,y)=f_{yy}(x,y)=-\sin(x+y).$$

【各 1 点】

日本工業大学

5 以下は $2.02^4 \times 2.99^3$ の近似値を計算する方法について述べた文である．空欄に当てはまる最も適切な数または式を解答欄に書きなさい．【各 1 点】

$f(x,y) = \boxed{(1)}$ とおくと，

$$2.02^4 \times 2.99^3 = f(2+\boxed{(2)}, 3+\boxed{(3)})$$

である．$z = f(x,y)$ の全微分は

$$dz = \boxed{(4)}\,dx + \boxed{(5)}\,dy$$

であり，これは独立変数 x, y の変化量がそれぞれ dx, dy のときの z の変化量を表している．$x = 2,\ y = 3,\ dx = \boxed{(2)},\ dy = \boxed{(3)}$ とすると，

$$dz = \boxed{(6)}$$

となるので，次の近似値

$$2.02^4 \times 2.99^3 \fallingdotseq \boxed{(7)} + \boxed{(6)}$$

が得られる．

(解答欄)

(1) x^4y^3

(2) 0.02

(3) -0.01

(4) $4x^3y^3$

(5) $3x^4y^2$

(6) 12.96

(7) $2^4 \times 3^3 (= 432)$

(計算欄)

(6) の計算;

$$\begin{aligned} dz \approx& 4 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot 0.02 + 3 \cdot 2^4 \cdot 3^2 \cdot (-0.01) \\ =& 2^6 \cdot 3^3 \cdot 0.01 - 2^4 \cdot 3^3 \cdot 0.01 \\ =& (2^2 - 1) \cdot 2^4 \cdot 3^3 \cdot 0.01 \\ =& 2^4 \cdot 3^4 \cdot 0.01 \\ =& 6^4 \cdot 0.01 \\ =& 12.96. \end{aligned}$$

以上により，近似値 (7) + (6) = 444.96 を得る（実際には，$2.02^4 \times 2.99^3 = 445.06$）．

6 陰関数 $x^2 - xy + y^2 = 3$ に対し，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めなさい．【4 点】

$F(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 3$ とおくと，

$$\begin{aligned} F_x(x,y) =& 2x - y, \\ F_y(x,y) =& -x + 2y \end{aligned}$$

である．よって，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{2x-y}{-x+2y} = \boldsymbol{\frac{2x-y}{x-2y}}.$$

7 関数

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+x+y}}$$

をマクローリン展開したときの，(i) 定数項，(ii) x の係数，(iii) xy の係数を求めなさい．ただし，関数 $f(x,y)$ のマクローリン展開が

$$f(h,k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0,0)$$

によって与えれられることを利用してよい．【6 点】

2 変数関数のマクローリン展開は

$$\begin{aligned} f(x,y) =& f(0,0) + f_x(0,0)\,x + f_y(0,0)\,y \\ &+ \frac{1}{2}(f_{xx}(0,0)\,x^2 + 2f_{xy}(0,0)\,xy + f_{yy}(0,0)\,y^2) + \cdots \end{aligned}$$

である．

(i) 定数項は $f(0,0) = \underline{1}$.

(ii) x の係数は，$f_x(0,0)$.

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{(1+x+y)^{-\frac{1}{2}}\right\} = -\frac{1}{2}(1+x+y)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\therefore\ f_x(0,0) = \underline{-\frac{1}{2}}.$$

(iii) xy の係数は，$f_{xy}(0,0)$.

$$\begin{aligned} f_{xy}(x,y) =& \frac{\partial}{\partial y} f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left\{-\frac{1}{2}(1+x+y)^{-\frac{3}{2}}\right\} \\ =& -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)(1+x+y)^{-\frac{5}{2}} \\ =& \frac{3}{4}(1+x+y)^{-\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

$$\therefore\ f_{xy}(0,0) = \underline{\frac{3}{4}}.$$