

2019年度^春秋学期末試験問題・解答

試験実施日 2019年 7月 31日 1時限

出題者記入欄

試験科目名 <u>微分積分学 III</u>		出題者名 <u>佐藤 弘康</u>	
試験時間 <u>60</u> 分	平常授業日 <u>水</u> 曜日 <u>1</u> 時限		
持ち込みについて 可 <input type="checkbox"/> 不可 <input checked="" type="checkbox"/>		可、不可のいずれかに○印をつけ 持ち込み可のものを○で囲んでください	
教科書・参考書・ノート(手書きのみ・コピーも可)・電卓・辞書 その他 ()			
本紙以外に必要とする用紙		解答用紙 <u>0</u> 枚	計算用紙 <u>0</u> 枚
通信欄			

受験者記入欄

学 科	学 年	学 籍 番 号			氏 名
		1	⋮	⋮	

採点者記入欄

採点欄	評価

1 $x^2 + 2xy - y^2 = -8$ の陰関数を $y = f(x)$ とする. このとき, 以下の問に答えなさい. 【8点】

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい.

(2) $f'(a) = 0$ を満たす $x = a$ と, $b = f(a)$ の組 (a, b) をすべて求めなさい.

(3) $f'(a) = 0$ を満たす $x = a$ に対し, $f''(a)$ の符号を調べ, $b = f(a)$ が極大値か極小値か, またはそのどちらでもないか判定しなさい. ただし, $F(x, y) = 0$ の陰関数の 2 階導関数が

$$y'' = -\frac{F_{xx}(x, y) + 2F_{xy}(x, y)y' + F_{yy}(x, y)(y')^2}{F_y(x, y)}$$

となることを用いてよい.

2 関数

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 2x - y + 1$$

の極値をすべて求めなさい. 【8点】

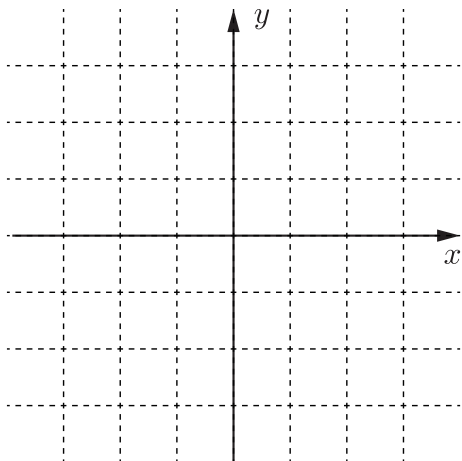
3 次の2重積分を求めなさい。【各4点】

(1) $\iint_D (2x - y) dx dy$ $D: 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2$

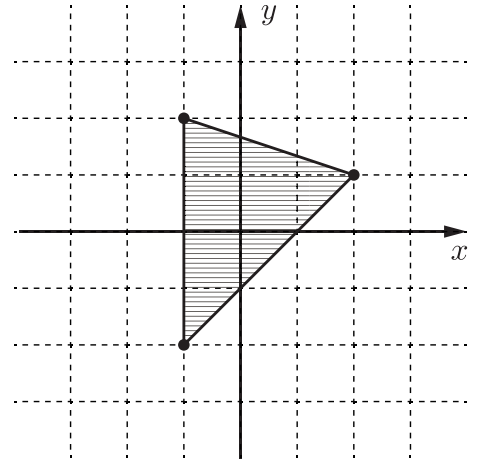
(2) $\iint_D x^2 y^2 dx dy$ $D: 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq 2x$

4 次の各問に答えなさい。【各4点】

(1) 領域 $D: 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x$ を xy -平面に図示しなさい。



(2) 3点 $(-1, 2), (-1, -2), (2, 1)$ を頂点とする三角形の領域（下図参照）を x, y の不等式で表しなさい。



5 $\int_0^1 \int_0^x f(x, y) dy dx$ の積分順序を変更しなさい。【4点】

6 空間内の領域 $\Omega: 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq xy + 1$ の体積 V を求めなさい。【4点】

2019年度 **春** 学期末試験問題・解答
秋

試験実施日 2019年 7月 31日 1時限

出題者記入欄

試験科目名 <u>微分積分学 III</u>		出題者名 <u>佐藤 弘康</u>	
試験時間 <u>60</u> 分	平常授業日 <u>水</u> 曜日 <u>1</u> 時限		
<p>持ち込みについて 可 <input type="radio"/> 不可 <input checked="" type="radio"/> 可、不可のいずれかに○印をつけ 持ち込み可のものを○で囲んでください</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>教科書・参考書・ノート(手書きのみ・コピーも可)・電卓・辞書 その他 ()</p> </div>			
本紙以外に必要とする用紙		解答用紙 <u>0</u> 枚	計算用紙 <u>0</u> 枚
通信欄			

受験者記入欄

学 科	学 年	学 籍 番 号			氏 名
		1	⋮	⋮	

採点者記入欄

採点欄	評価

1 $x^2 + 2xy - y^2 = -8$ の陰関数を $y = f(x)$ とする。このとき、以下の間に答えなさい。【8点】

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい。

$$F(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 + 8 \text{ とおくと,}$$

$$F_x(x, y) = 2x + 2y = 2(x + y),$$

$$F_y(x, y) = 2x - 2y = 2(x - y)$$

である。 $y = f(x)$ は $F(x, y) = 0$ の陰関数なので、

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = -\frac{2(x + y)}{2(x - y)} = -\frac{x + y}{x - y}. \quad \text{【2点】}$$

(2) $f'(a) = 0$ を満たす $x = a$ と、 $b = f(a)$ の組 (a, b) をすべて求めなさい。

a, b は仮定から、

$$F(a, b) = a^2 + 2ab - b^2 + 8 = 0$$

を満たす。 $f'(a) = 0$ ならば、(1) の結果より、

$$f'(a) = -\frac{a + b}{a - b} = 0, \quad \text{つまり,} \quad a + b = 0$$

が成り立つ。(2) 式より $b = -a$ を、(1) 式に代入すると

$$(-a)^2 + 2a \times (-a) - (-a)^2 + 8 = 0, \quad \therefore a^2 = 4$$

となり、 $a = \pm 2$ を得る。よって、求める数の組 a, b は、 $(2, -2)$ と $(-2, 2)$ である。【2点】

(3) $f'(a) = 0$ を満たす $x = a$ に対し、 $f''(a)$ の符号を調べ、 $b = f(a)$ が極大値か極小値か、またはそのどちらでもないか判定しなさい。ただし、 $F(x, y) = 0$ の陰関数の2階導関数が

$$y'' = -\frac{F_{xx}(x, y) + 2F_{xy}(x, y)y' + F_{yy}(x, y)(y')^2}{F_y(x, y)}$$

となることを用いてよい。

$f(a) = b$ かつ $f'(a) = 0$ のとき、 $f''(a) = -\frac{F_{xx}(a, b)}{F_y(a, b)}$ となる。 $F_{xx}(x, y) = 2$ より、

$$f''(x) = -\frac{2}{x - y}$$

である。

$$f''(2) = -\frac{2}{2 - (-2)} = -\frac{1}{2} < 0,$$

$$f''(-2) = -\frac{2}{-2 - 2} = \frac{1}{2} > 0$$

なので、 $a = 2$ のとき、 $b = -2$ は極大値で、 $a = -2$ のとき、 $b = 2$ は極小値である。【4点】

2 関数

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 2x - y + 1$$

の極値をすべて求めなさい。【8点】

f の偏導関数は

$$f_x = 2x - y + 2,$$

$$f_y = -x + 2y - 1$$

である。連立方程式 $f_x = f_y = 0$ 、すなわち

$$\begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ -x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

の解は $(x, y) = (-1, 0)$ のみである。【2点】

この点で極値をとるか否か判定する。 f の2次偏導関数は

$$f_{xx} = 2$$

$$f_{xy} = -1$$

$$(1) \quad f_{yy} = 2$$

である。

(2) このとき、

$$\begin{aligned} D(-1, 0) &= \{f_{xy}(-1, 0)\}^2 - f_{xx}(-1, 0)f_{yy}(-1, 0) \\ &= (-1)^2 - 2 \times 2 = -3 < 0 \end{aligned}$$

であるから、この点で極値をとる【2点】。

$f_{xx}(-1, 0) = 2 > 0$ より、この点で極小値をとり【2点】、その値は

$$\begin{aligned} f(-1, 0) &= (-1)^2 - (-1) \times 0 + 0^2 + 2 \times (-1) - 0 + 1 \\ &= 1 - 2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

である。【2点】

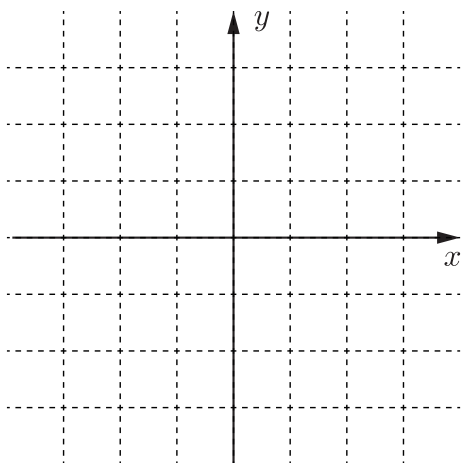
3 次の2重積分を求めなさい。【各4点】

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \iint_D (2x - y) dx dy \quad D: 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2 \\
 &= \int_1^2 \int_1^3 (2x - y) dx dy = \int_1^2 [x^2 - xy]_{x=1}^{x=3} dy \\
 &= \int_1^2 \{(9 - 3y) - (1 - y)\} dy = \int_1^2 (8 - 2y) dy \\
 &= [8y - y^2]_1^2 = 16 - 4 - (8 - 1) \\
 &= 5.
 \end{aligned}$$

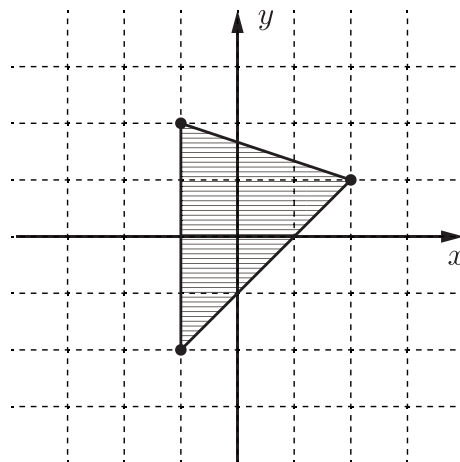
$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \iint_D x^2 y^2 dx dy \quad D: 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq 2x \\
 &= \int_0^1 x^2 \int_{-x}^{2x} x^2 y^2 dy dx = \int_0^1 x^2 \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=-x}^{y=2x} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{x^2}{3} \{8x^3 - (-x)^3\} dx = \int_0^1 \frac{x^2}{3} \cdot 9x^3 dx \\
 &= \int_0^1 3x^5 dx = 3 \left[\frac{x^6}{6} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

4 次の各問に答えなさい。【各4点】

(1) 領域 $D: 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x$ を xy -平面に図示しなさい。

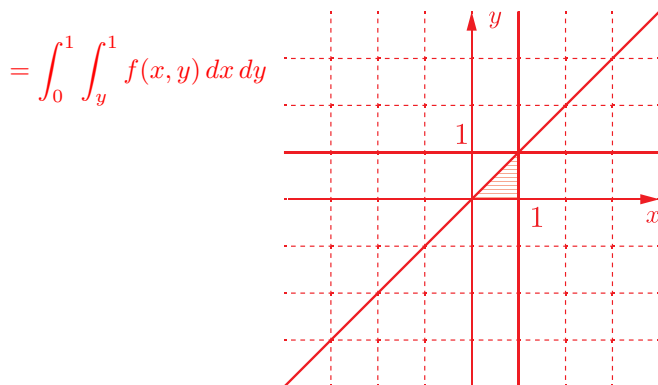


(2) 3点 $(-1, 2), (-1, -2), (2, 1)$ を頂点とする三角形の領域 (下図参照) を x, y の不等式で表しなさい。



$$-1 \leq x \leq 2, \quad x - 1 \leq y \leq \frac{5}{3} - \frac{x}{3}.$$

5 $\int_0^1 \int_0^x f(x, y) dy dx$ の積分順序を変更しなさい。【4点】



6 空間内の領域 $\Omega: 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq xy + 1$ の体積 V を求めなさい。【4点】

領域 $D: 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 1$ において, $xy + 1 \geq 0$ であるから,

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_D (xy + 1) dx dy = \int_0^1 \int_0^{y^2} (xy + 1) dx dy \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{x^2 y}{2} + x \right]_{x=0}^{x=y^2} dy = \int_0^1 \left(\frac{y^5}{2} + y^2 \right) dy \\
 &= \left[\frac{y^6}{12} + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} \\
 &= \frac{5}{12}.
 \end{aligned}$$

