1 $x^2+2xy-y^2=-8$ の陰関数を $y=f(x)$ とする．このとき，以下の問に答えなさい．【8 点】

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい．

$F(x,y)=x^2+2xy-y^2+8$ とおくと，

$$F_x(x,y)=2x+2y=2(x+y),$$
$$F_y(x,y)=2x-2y=2(x-y)$$

である．$y=f(x)$ は $F(x,y)=0$ の陰関数なので，

$$f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\frac{2(x+y)}{2(x-y)}=-\boldsymbol{\frac{x+y}{x-y}}.$$ 【2 点】

(2) $f'(a)=0$ を満たす $x=a$ と，$b=f(a)$ の組 (a,b) をすべて求めなさい．

a,b は仮定から，

$$F(a,b)=a^2+2ab-b^2+8=0 \quad (1)$$

を満たす．$f'(a)=0$ ならば，(1) の結果より，

$$f'(a)=-\frac{a+b}{a-b}=0,\quad つまり，\quad a+b=0 \quad (2)$$

が成り立つ．(2) 式より $b=-a$ を，(1) 式に代入すると

$$(-a)^2+2a\times(-a)-(-a)^2+8=0,\qquad \therefore\ a^2=4$$

となり，$a=\pm2$ を得る．よって，求める数の組 a,b は，**$(2,-2)$** と **$(-2,2)$** である．【2 点】

(3) $f'(a)=0$ を満たす $x=a$ に対し，$f''(a)$ の符号を調べ，$b=f(a)$ が極大値か極小値か，またはそのどちらでもないか判定しなさい．ただし，$F(x,y)=0$ の陰関数の 2 階導関数が

$$y''=-\frac{F_{xx}(x,y)+2F_{xy}(x,y)\,y'+F_{yy}(x,y)(y')^2}{F_y(x,y)}$$

となることを用いてよい．

$f(a)=b$ かつ $f'(a)=0$ のとき，$f''(a)=-\dfrac{F_{xx}(a,b)}{F_y(a,b)}$ となる．$F_{xx}(x,y)=2$ より，

$$f''(x)=-\frac{2}{x-y}$$

である．

$$f''(2)=-\frac{2}{2-(-2)}=-\frac{1}{2}<0,$$
$$f''(-2)=-\frac{2}{-2-2}=\frac{1}{2}>0$$

なので，$a=2$ のとき，**$b=-2$ は極大値**で，$a=-2$ のとき，**$b=2$ は極小値**である．【4 点】

2 関数

$$f(x,y)=x^2-xy+y^2+2x-y+1$$

の極値をすべて求めなさい．【8 点】

f の偏導関数は

$$f_x=2x-y+2,$$
$$f_y=-x+2y-1$$

である．連立方程式 $f_x=f_y=0$，すなわち

$$\begin{cases} 2x-y+2=0 \\ -x+2y-1=0 \end{cases}$$

の解は $(x,y)=(-1,0)$ のみである．【2 点】
この点で極値をとるか否か判定する．f の 2 次偏導関数は

$$f_{xx}=2$$
$$f_{xy}=-1$$
$$f_{yy}=2$$

である．
このとき，

$$D(-1,0)=\{f_{xy}(-1,0)\}^2-f_{xx}(-1,0)\,f_{yy}(-1,0)$$
$$=(-1)^2-2\times a\times 2=-3<0$$

であるから，この点で**極値をとる**【2 点】．
$f_{xx}(-1,0)=2>0$ より，この点で**極小値**をとり【2 点】，その値は

$$f(-1,0)=(-1)^2-(-1)\times0+0^2+2\times(-1)-0+1$$
$$=1-2+1=\mathbf{0}$$

である．【2 点】

3 次の 2 重積分を求めなさい．【各 4 点】

(1) $\displaystyle\iint_D (2x-y)\,dxdy \quad D: 1 \leqq x \leqq 3,\ 1 \leqq y \leqq 2$

$$= \int_1^2 \int_1^3 (2x-y)\,dx\,dy = \int_1^2 \left[x^2 - xy\right]_{x=1}^{x=3} dy$$

$$= \int_1^2 \{(9-3y)-(1-y)\}\,dy = \int_1^2 (8-2y)\,dy$$

$$= \left[8y - y^2\right]_1^2 = 16 - 4 - (8-1)$$

$$= \mathbf{5}.$$

(2) $\displaystyle\iint_D x^2y^2\,dxdy \quad D: 0 \leqq x \leqq 1,\ -x \leqq y \leqq 2x$

$$= \int_0^1 x^2 \int_{-x}^{2x} x^2y^2\,dy\,dx = \int_0^1 x^2 \left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=-x}^{y=2x} dx$$

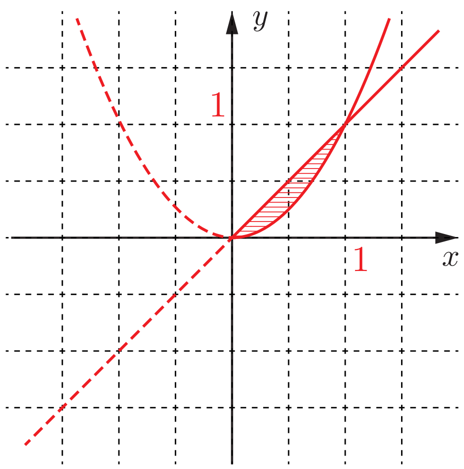
$$= \int_0^1 \frac{x^2}{3}\{8x^3 - (-x)^3\}dx = \int_0^1 \frac{x^2}{3} \cdot 9x^3\,dx$$

$$= \int_0^1 3x^5\,dx = 3\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1$$

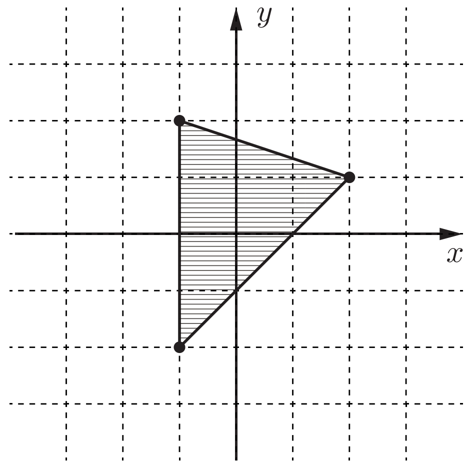
$$= \mathbf{\frac{1}{2}}.$$

4 次の各問に答えなさい．【各 4 点】

(1) 領域 $D: 0 \leqq x \leqq 1,\ x^2 \leqq y \leqq x$ を xy-平面に図示しなさい．



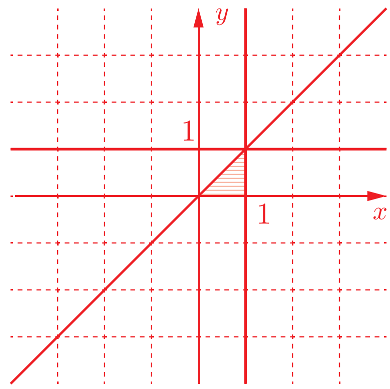
(2) 3 点 $(-1,2)$, $(-1,-2)$, $(2,1)$ を頂点とする三角形の領域（下図参照）を x, y の不等式で表しなさい．



$$-1 \leqq x \leqq 2, \quad x-1 \leqq y \leqq \frac{5}{3} - \frac{x}{3}.$$

5 $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,dy\,dx$ の積分順序を変更しなさい．【4 点】

$$= \int_0^1 \int_y^1 f(x,y)\,dx\,dy$$



6 空間内の領域 $\Omega: 0 \leqq x \leqq y^2, 0 \leqq y \leqq 1, 0 \leqq z \leqq xy+1$ の体積 V を求めなさい．【4 点】

領域 $D: 0 \leqq x \leqq y^2, 0 \leqq y \leqq 1$ において，$xy+1 \geqq 0$ であるから，

$$V = \iint_D (xy+1)\,dxdy = \int_0^1 \int_0^{y^2} (xy+1)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2y}{2} + x\right]_{x=0}^{x=y^2} dy = \int_0^1 \left(\frac{y^5}{2} + y^2\right) dx$$

$$= \left[\frac{y^6}{12} + \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{12} + \frac{1}{3}$$

$$= \mathbf{\frac{5}{12}}.$$