科 目 名　微分方程式　　出 題 者 名　佐藤 弘康

問題 以下の 5 つの微分方程式について, $\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ の問に答えなさい.

(ア) $(y+1)\,dx + (1-x)\,dy = 0$

(イ) $(3xy^2 + 2y + 1)\,dx + (2x^2y + x)\,dy = 0$

(ウ) $(y - e^x)\,dx + x\,dy = 0$

(エ) $(x^2 + y^2)\,dx + xy\,dy = 0$

(オ) $(6x + y^3)\,dx + 3xy^2\,dy = 0$

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次に該当するものを **(ア)**～**(オ)** の中から選びなさい. 【各 2 点】

(1) 変数分離形微分方程式を選びなさい.

解答欄　**(ア)**

(2) 同次形微分方程式を**すべて**選びなさい.

解答欄　**(エ)**

(3) 線形微分方程式を**すべて**選びなさい.

解答欄　**(ア)**, **(ウ)**

(4) ベルヌーイの微分方程式を**すべて**選びなさい（ただし, 変数分離形微分方程式, 線形微分方程式, 同次形微分方程式は除く）.

解答欄　**(オ)**

(5) 完全微分方程式を**すべて**選びなさい.

解答欄　**(ウ)**, **(オ)**

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の問に答えなさい. 【各 5 点】

(1) $y = -2x + 1$ が, $\boxed{1}$ (1) で選択した微分方程式の解であることを示しなさい.

$\boxed{1}$ (1) に該当するのは **(ア)** のみである. **(ア)** は

$$y + 1 + (1-x)y' = 0$$

と書ける. $y = -2x + 1$ とその微分 $y' = -2$ を上の式の左辺に代入すると,

$$\begin{aligned} y + 1 &+ (1-x)y' \\ &= (-2x+1) + 1 + (1-x)\times(-2) = 0 \end{aligned}$$

となり, $y = -2x + 1$ が **(ア)** の解であることがわかる.

(2) $\boxed{1}$ (2) で選択した微分方程式の中から 1 つ選び, $v = \dfrac{y}{x}$ とおくことにより, v と x の変数分離形微分方程式に変換しなさい.

$\boxed{1}$ (2) に該当するのは **(エ)** のみである. $v = \dfrac{y}{x}$ とその微分 $y' = v + xv'$ を **(エ)** に代入すると,

$$\begin{aligned} \textbf{(エ)} &\iff (x^2 + y^2)\,dx + xyy' = 0 \\ &\iff 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}y' = 0 \\ &\iff (1 + v^2) + v(v + xv') = 0 \\ &\iff 1 + 2v^2 + xvv' = 0 \\ &\iff 1 + 2v^2 + xv\frac{dv}{dx} = 0 \\ &\iff \frac{v}{1+2v^2}\,dv = -\frac{1}{x}\,dx \end{aligned}$$

となる.

(3) $\boxed{1}$ (4) で選択した微分方程式の中から 1 つ選び, $z = y^k$ とおくことにより, z と x の線形微分方程式に変換しなさい.

微分方程式 $y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n$ に対し, $z = y^{1-n}$ とおくと, $z = z(x)$ に関する線形微分方程式になる.
$\boxed{1}$ (4) に該当するのは **(オ)** のみであり,

$$\textbf{(オ)} \iff y' + \frac{1}{3x}y = -2y^{-2}$$

より, この場合は $n = -2$ である. $z = y^{1-(-2)} = y^3$ とおくと, $z' = 3y^2y'$ なので, これらを **(オ)** に代入すると,

$$z' + \frac{1}{x}z = -6$$

となる.

(4) $\boxed{1}$ (1)～(5) のどれにも該当しない選択肢がただ 1 つだけある. $\lambda = x$ が, その微分方程式の積分因子であることを示しなさい.

$\boxed{1}$ (1)～(5) のどれにも該当しないのは **(イ)** である. この微分方程式の両辺に x をかけると,

$$(3x^2y^2 + 2xy + x)\,dx + (2x^3y + x^2)\,dy = 0$$

となり,

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 + 2xy + x) = 6x^2y + 2x = \frac{\partial}{\partial x}(2x^3y + x^2)$$

より, これは完全微分方程式となる. よって, $\lambda = x$ は **(イ)** の積分因子であることがわかる.

3 次の問に答えなさい．【各 5 点】

(1) **(ア)〜(オ)** の中から 1 つ選び，その一般解を求めなさい．

(ア) 変数分離形微分方程式として一般解を求める．

$$\textbf{(ア)} \Longrightarrow \int \frac{1}{y+1}\,dy = \int \frac{1}{x-1}\,dx$$
$$\Longleftrightarrow \log(y+1) = \log(x-1) + c = \log C(x-1)$$
$$\Longleftrightarrow y+1 = C(x-1).$$

よって，一般解は $\underline{y = C(x-1) - 1}$ である．

(イ) $\boxed{2}$ (4) の結果を用いて，完全微分方程式として一般解を求める．

$$\textbf{(イ)} \Longrightarrow c = \int_0^x (3t^2y^2 + 2ty + t)\,dt + \int_0^y 0\,dt$$
$$= \left[t^3y^2 + t^2y + \frac{t^2}{2}\right]_0^x = x^3y^2 + x^2y + \frac{x^2}{2}.$$

よって，一般解は $\underline{2x^3y^2 + 2x^2y + x^2 = C}$ である．

(ウ) 完全微分方程式として一般解を求める．

$$\textbf{(ウ)} \Longrightarrow c = \int_0^x (y - e^t)\,dt + \int_0^y 0\,dt$$
$$= \left[yt - e^t\right]_0^x = xy - e^x - 1$$

よって，一般解は $\underline{xy - e^x = C}$ である．

(エ) 同次形微分方程式として一般解を求める．
$\boxed{1}$ (2) の結果より，$v = y/x$ とおくと

$$\textbf{(エ)} \Longrightarrow \int \frac{v}{1+2v^2}\,dv = -\int \frac{1}{x}\,dx$$
$$\Longleftrightarrow \frac{1}{4}\int \frac{(1+2v^2)'}{1+2v^2}\,dv = -\int \frac{1}{x}\,dx$$
$$\Longleftrightarrow \frac{1}{4}\log(1+2v^2) = -\log x + c$$
$$\Longleftrightarrow \log(1+2v^2) = -4\log x + 4c = \log\frac{C}{x^4}$$
$$\Longleftrightarrow 1 + 2v^2 = \frac{C}{x^4} \Longleftrightarrow 1 + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{C}{x^4}.$$

よって，一般解は $\underline{x^4 + 2x^2y^2 = C}$ である．

(オ) ベルヌーイの微分方程式として一般解を求める．
$\boxed{2}$ (3) の結果より，$z(=y^3)$ と x の線形微分方程式 $z' + \frac{1}{x}z = -6$ となる．
これは，$P(x) = 1/x$, $Q(x) = -6$ の場合であるから，

$$\int P(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \log x,$$
$$\int e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\,dx = -6\int e^{\log x}\,dx$$
$$= -6\int x\,dx = -3x^2$$

より，$z = e^{-\log x}(-3x^2 + c) = \frac{1}{x}(-3x^2 + c)$ を得る．
$z = y^3$ より，一般解は $\underline{xy^3 + 3x^2 = c}$.

(2) **(ア)〜(オ)** の中から 1 つ選び，初期条件 $(x, y) = (2, 2)$ を満たす特殊解を求めなさい．ただし，$\boxed{3}$ (1) で選んだものを除く．

(ア) $2 = C(2-1) - 1$. よって，$C = 3$ より，

$$y = 3x - 4.$$

(イ) $2^6 + 2^4 + 2^2 = C$. よって，$C = 84$ より，

$$2x^3 + 2x^2y + x^2 = 84.$$

(ウ) $2^2 - e^2 = C$. よって，$C = 4 - e^2$ より，

$$xy - e^x = 4 - e^2.$$

(エ) $2^4 + 2^5 = C$. よって，$C = 48$ より，

$$x^4 + 2x^2y^2 = 48.$$

(オ) $2^4 + 3 \times 2^2 = c$. よって，$c = 28$ より，

$$xy^3 + 3x^2 = 28.$$

部分点

- $\boxed{1}$ について，適切でない選択肢を選択していたり，または該当する選択肢を選択していない場合は，それぞれ 1 点減点する．ただし，各設問の最低点は 0 点とする．
- $\boxed{1}$ 以外の問題について，途中まで正しく計算できているおり，必要な知識・技能が身についていると概ね判断される場合は，3 点加点する．