**問題** 次の **(ア)**〜**(エ)** の2階定数係数線形微分方程式について, 1 〜 4 の問に答えなさい.

**(ア)** $y'' - 4y' + 8y = e^{-2x}$

**(イ)** $y'' - 2y' - 3y = e^{3x}$

**(ウ)** $y'' + 3y' + 2y = 2x^2 + x$

**(エ)** $y'' + 2y' + y = \sin 2x$

**1** 定数係数線形微分方程式 $f(D)y = F(x)$ に対し, 定数係数線形**同次**微分方程式 $f(D)y = 0$ を, 元の微分方程式の**同次形**とよぶことにする.
**(ア)**〜**(エ)** の中から3つ選び, その同次形の一般解を求めなさい.

**(選択記号)**

**(ア)** 補助方程式 $t^2 - 4t + 8 = 0$ の解は, $t = 2 \pm 2i$. よって, 一般解は, $\boldsymbol{y = e^{2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)}$.

**(イ)** 補助方程式は $t^2 - 2t - 3 = (t-3)(t+1) = 0$ であり, 異なる2つの実数解 $t = -1, 3$ を持つので, 一般解は, $\boldsymbol{y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}}$.

**(選択記号)**

**(ウ)** 補助方程式は $t^2 + 3t + 2 = (t+1)(t+2) = 0$ であり, 異なる2つの実数解 $t = -2, -1$ を持つので, 一般解は, $\boldsymbol{y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}}$.

**(エ)** 補助方程式 $t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2 = 0$ は, 重解 $t = -1$ を持つので, 一般解は, $\boldsymbol{y = e^{-x}(c_1 x + c_2)}$.

**(選択記号)**

**2** **(ア)**〜**(エ)** の中から3つ選び, その特殊解を逆演算子法, または未定係数法を用いてそれぞれ1つ求めなさい.

**(選択記号)**

**(ア)**

$$\frac{1}{D^2 - 4D + 8} e^{-2x} = \frac{1}{(-2)^2 - 4 \times (-2) + 8} e^{-2x} = \frac{1}{4+8+8} e^{-2x} = \boldsymbol{\frac{1}{20} e^{-2x}}.$$

**(イ)**

$$\frac{1}{D^2 - 2D - 3} e^{3x} = \frac{1}{(D-3)(D+1)} e^{3x} = \frac{1}{D-3} \cdot \frac{1}{D+1} e^{3x}$$
$$= \frac{1}{D-3} \cdot \frac{1}{3+1} e^{3x} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{D-3} e^{3x}$$
$$= \frac{1}{4} e^{3x} \int e^{-3x} e^{3x}\, dx = \frac{1}{4} e^{3x} \int dx$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{4} x e^{3x}}.$$

**(選択記号)**

**(ウ)** 特殊解は, $y = ax^2 + bx + c$ と書ける. $y' = 2ax + b$, $y'' = 2a$ より,

$$2a + 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 2x^2 + x$$

が任意の $x$ に対して成り立つので,

$$2a = 2, \quad 6a + 2b = 1, \quad 2a + 3b + 2c = 0$$

を得る. 連立方程式の解は $a = 1, b = -\frac{5}{2}, c = \frac{11}{4}$ なので, 特殊解は $\boldsymbol{y = x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{11}{4}}$.

**(選択記号)**

(エ) 特殊解は, $y = A\cos 2x + B\sin 2x$ と書ける. $y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$, $y'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$ より,

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 2(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) + A\cos 2x + B\sin 2x = \sin 2x$$

が任意の $x$ に対して成り立つので,

$$-4A + 4B + A = 0, \quad -4B - 4A + B = 1$$

を得る. 連立方程式 $-3A + 4B = 0, -4A - 3B = 1$ の解は, $A = -\frac{4}{25}, B = -\frac{3}{25}$ なので, 特殊解は $\boldsymbol{y = -\frac{1}{25}(4\cos 2x + 3\sin 2x)}$.

**3** **(ア)〜(エ)** の中から 2 つ選び, その一般解を求めなさい.

**(選択記号)**

$\boxed{1}\boxed{2}$ の結果より, 以下のようになる;

**(ア)** $\boldsymbol{y = e^{2x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x) + \frac{1}{20}e^{-2x}}$

**(イ)** $\boldsymbol{y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x} + \frac{1}{4}xe^{3x}}$

**(ウ)** $\boldsymbol{y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x} + x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{11}{4}}$

**(エ)** $\boldsymbol{y = e^{-x}(c_1x + c_2) - \frac{1}{25}(4\cos 2x + 3\sin 2x)}$

**(選択記号)**

**4** 1 階微分方程式においては, 初期条件 $(x, y) = (a, b)$ が与えられると, それを満たす特殊解が定まった. 同様に, 2 階微分方程式においては,「$x = a$ のとき $y = b_0$, および $y' = b_1$」が与えられると, 特殊解が定まる.
**(ア)〜(エ)** の中から 1 つ選び, 初期条件

$$x = 0 \text{ のとき}, y = 1 \text{ かつ } y' = 1$$

を満たす特殊解を求めなさい（ただし, $\boxed{3}$ で選択したものを除く）.

**(選択記号)**

(ア) 一般解 $y = e^{2x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x) + \frac{1}{20}e^{-2x}$ に対し, $x = 0$ のとき, $y = c_1 + \frac{1}{20} = 1$. $y' = 2e^{2x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x) + e^{2x}(-2c_1\sin 2x + 2c_2\cos 2x) - \frac{1}{10}e^{-2x}$ より, $x = 0$ のとき, $y' = 2c_1 + 2c_2 - \frac{1}{10} = 1$. よって, $c_1 = \frac{19}{20}, c_2 = -\frac{2}{5}$. したがって, 求める特殊解は

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{20}e^{2x}(19\cos 2x - 8\sin 2x) + \frac{1}{20}e^{-2x}}.$$

(イ) 一般解 $y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x} + \frac{1}{4}xe^{3x}$ に対し, $x = 0$ のとき, $y = c_1 + c_2 = 1$. $y' = -c_1e^{-x} + 3c_2e^{3x} + \frac{1}{4}e^{3x} + \frac{3}{4}xe^{3x}$ より, $x = 0$ のとき, $y' = -c_1 + 3c_2 + \frac{1}{4} = 1$. 以上により, $c_1 = \frac{9}{16}, c_2 = \frac{7}{16}$ を得る. よって求める特殊解は

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{16}\left(9e^{-x} + 7e^{3x}\right) + \frac{1}{4}xe^{3x}}.$$

(ウ) 一般解 $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x} + x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{11}{4}$ に対し, $x = 0$ のとき, $y = c_1 + c_2 + \frac{11}{4} = 1$. $y' = -2c_1e^{-2x} - c_2e^{-x} + 2x - \frac{5}{2}$ より, $x = 0$ のとき, $y' = -2c_1 - c_2 - \frac{5}{2} = 1$. 以上により, $c_1 = -\frac{7}{4}, c_2 = 0$ を得る. よって求める特殊解は

$$\boldsymbol{y = -\frac{7}{4}e^{-2x} + x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{11}{4}}.$$

(エ) 一般解 $y = e^{-x}(c_1x + c_2) - \frac{1}{25}(4\cos 2x + 3\sin 2x)$ より, $x = 0$ のとき, $y = c_2 - \frac{4}{25} = 1$. $y' = -e^{-x}(c_1x + c_2) + c_1e^{-x} - \frac{1}{25}(-8\sin 2x + 6\cos 2x)$ より, $x = 0$ のとき, $y' = -c_2 + c_1 - \frac{6}{25} = 1$. 以上により, $c_1 = \frac{12}{5}, c_2 = \frac{29}{25}$ を得る. よって求める特殊解は

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{25}e^{-x}(60x + 29) - \frac{1}{25}(4\cos 2x + 3\sin 2x)}.$$

**参考**

- $\alpha$ を定数とする．関数 $F(x)$ に対し，

$$\frac{1}{D-\alpha}F(x)=e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}F(x)\,dx$$

- 実数 $\theta$ に対し，

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

**配点**

- $\boxed{4}$ は 8 点, それ以外は各 4 点.
- 解が正しくなくても, 解を導く手順を概ね理解していると判断できる場合は 1〜3 点加点する場合がある.
- $\boxed{4}$ は部分点なし.