科 目 名　応用数学 I-J　　出 題 者 名　佐藤 弘康

1 極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ を求めなさい．【5 点】

$f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ とおく．単に $x=y=0$ を代入すると，$f(0,0)=\frac{0}{0}$ となり，これは不定形である．そこで，$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ と極表示して考える．このとき，$(x,y)\to(0,0)$ は $r\to 0$ と同値である．

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta)=\cos 2\theta$$

より，これは θ にのみ依存することがわかる．よって，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{r\to 0}\cos 2\theta$$

は極限値を持たない（発散する）．

2 次の関数 $f(x,y)$ について，2 次までの偏導関数をすべて求めなさい．【各 5 点】

(1) $f(x,y)=x^3-2xy^2+3y^3$

$$\begin{aligned} f_x(x,y)=&3x^2-2y^2\\ f_y(x,y)=&-4xy+9y^2\\ f_{xx}(x,y)=&6x\\ f_{xy}(x,y)=&-4y\\ f_{yy}(x,y)=&-4x+18y \end{aligned}$$

(2) $f(x,y)=\sin(x+y)$

$$\begin{aligned} f_x(x,y)=&f_y(x,y)=\cos(x+y)\\ f_{xx}(x,y)=&f_{xy}(x,y)=f_{yy}(x,y)=-\sin(x+y) \end{aligned}$$

配点　各 1 点

以下は $2.02^4\times 2.99^3$ の近似値を計算する方法について述べた文である．空欄に当てはまる最も適切な数または式を解答欄に書きなさい．【10 点】

$f(x,y)=\boxed{(1)}$ とおくと，

$$2.02^4\times 2.99^3=f(2+\boxed{(2)}, 3+\boxed{(3)})$$

である．$z=f(x,y)$ の全微分は

$$dz=\boxed{(4)}dx+\boxed{(5)}dy$$

であり，これは独立変数 x,y の変化量がそれぞれ dx, dy のときの z の変化量を表している．$x=2$, $y=3$, $dx=\boxed{(2)}$, $dy=\boxed{(3)}$ とすると，

$$dz=\boxed{(6)}$$

となるので，次の近似値

$$2.02^4\times 2.99^3 \fallingdotseq \boxed{(7)}+\boxed{(6)}$$

が得られる．

（解答欄）

(1) x^4y^3　　(2) 0.02

(3) -0.01　　(4) $4x^3y^3$

(5) $3x^4y^2$　　(6) 12.96

(7) $2^4\times 3^3(=432)$

（計算欄）

(6) の計算;

$$\begin{aligned} dz\approx&4\cdot 2^3\cdot 3^3\cdot 0.02+3\cdot 2^4\cdot 3^2\cdot(-0.01)\\ =&2^6\cdot 3^3\cdot 0.01-2^4\cdot 3^3\cdot 0.01\\ =&(2^2-1)\cdot 2^4\cdot 3^3\cdot 0.01\\ =&2^4\cdot 3^4\cdot 0.01\\ =&6^4\cdot 0.01\\ =&12.96. \end{aligned}$$

以上により，近似値 (7) + (6) = 444.96 を得る（実際には，$2.02^4\times 2.99^3=445.06$）．

配点　(4)(5)(6) は各 2 点，その他は各 1 点

3 $x^2+2xy-y^2=-8$ の陰関数を $y=f(x)$ とする．このとき，以下の問に答えなさい．【10 点】

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい．

$F(x,y)=x^2+2xy-y^2+8$ とおくと，

$$F_x(x,y)=2x+2y=2(x+y),$$
$$F_y(x,y)=2x-2y=2(x-y)$$

である．$y=f(x)$ は $F(x,y)=0$ の陰関数なので，

$$f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\frac{2(x+y)}{2(x-y)}=\boldsymbol{-\frac{x+y}{x-y}}.$$

【3 点】

(2) $f'(a)=0$ を満たす $x=a$ と，$b=f(a)$ の組 (a,b) をすべて求めなさい．

a,b は仮定から，

$$F(a,b)=a^2+2ab-b^2+8=0$$

を満たす．$f'(a)=0$ ならば，(1) の結果より，

$$f'(a)=-\frac{a+b}{a-b}=0,\quad つまり，\quad a+b=0$$

が成り立つ．(2) 式より $b=-a$ を，(1) 式に代入すると

$$(-a)^2+2a\times(-a)-(-a)^2+8=0,\qquad \therefore\ a^2=4$$

となり，$a=\pm2$ を得る．よって，求める数の組 a,b は，$\boldsymbol{(2,-2)}$ と $\boldsymbol{(-2,2)}$ である．【3 点】

(3) $f'(a)=0$ を満たす $x=a$ に対し，$f''(a)$ の符号を調べ，$b=f(a)$ が極大値か極小値か，またはそのどちらでもないか判定しなさい．ただし，$F(x,y)=0$ の陰関数の 2 階導関数が

$$y''=-\frac{F_{xx}(x,y)+2F_{xy}(x,y)\,y'+F_{yy}(x,y)(y')^2}{F_y(x,y)}$$

となることを用いてよい．

$f(a)=b$ かつ $f'(a)=0$ のとき，

$$f''(a)=-\frac{F_{xx}(a,b)}{F_y(a,b)}$$

が成り立つ．$F_{xx}(x,y)=2$ より，

$$f''(x)=-\frac{2}{x-y}$$

である．

$$f''(2)=-\frac{2}{2-(-2)}=-\frac{1}{2}<0,$$
$$f''(-2)=-\frac{2}{-2-2}=\frac{1}{2}>0$$

なので，$a=2$ のとき，$\boldsymbol{b=-2}$ **は極大値**で，$a=-2$ のとき，$\boldsymbol{b=2}$ **は極小値**である．【4 点】

4 関数

$$f(x,y)=x^2-xy+y^2+2x-y+1$$

の極値をすべて求めなさい．【15 点】

f の偏導関数は

$$f_x=2x-y+2,$$
$$f_y=-x+2y-1$$

である．連立方程式 $f_x=f_y=0$，すなわち

$$\begin{cases}2x-y+2=0\\-x+2y-1=0\end{cases}$$

の解は $(x,y)=(-1,0)$ のみである．【5 点】
この点で極値をとるか否か判定する．f の 2 次偏導関数は

$$f_{xx}=2$$
$$f_{xy}=-1$$
$$f_{yy}=2 \tag{1}$$

である．
このとき，

$$D(-1,0)=\{f_{xy}(-1,0)\}^2-f_{xx}(-1,0)\,f_{yy}(-1,0)$$
$$=(-1)^2-2\times a\times2=-3<0 \tag{2}$$

であるから，この点で**極値をとる**【5 点】．
$f_{xx}(-1,0)=2>0$ より，この点で**極小値**をとり，その値は

$$f(-1,0)=(-1)^2-(-1)\times0+0^2+2\times(-1)-0+1$$
$$=1-2+1=\boldsymbol{0}$$

である．【5 点】