1 次の関数 $f(z)$ と曲線 C に対し，複素積分 $\int_C f(z)\,dz$ を求めなさい．

【各 3 点】

(1) $f(z) = z+2,\quad C: z(t) = t + t^2 i,\ 0 \leqq t \leqq 1$

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_0^1 \{(t+t^2 i)+2\}(1+2ti)\,dt\\ &= \int_0^1 \{(t+2-2t^3)+i(3t^2+4t)\}\,dt\\ &= \left[\frac{t^2}{2}+2t-\frac{t^4}{2}\right]_0^1 + i\left[t^3+2t^2\right]_0^1\\ &= \mathbf{2+3i}\end{aligned}$$

(別解) $f(z) = z+2$ は正則関数であり，正則な原始関数 $F(z) = \frac{z^2}{2}+2z$ をもつ．曲線 C の始点は $z(0)=0$ で，終点は $z(1) = 1+i$ だから

$$\int_C f(z)\,dz = [F(z)]_0^{1+i} = F(1+i) - F(0) = \mathbf{2+3i}$$

(2) $f(z) = z - \bar{z},\quad C: z(t) = t^2 + ti,\ 0 \leqq t \leqq 1$

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_0^1 \{(t^2+ti)-(t^2-ti)\}(2t+i)\,dt\\ &= 2i\int_0^1 t(2t+i)\,dt = 2i\int_0^1 (2t^2+ti)\,dt\\ &= 2i\left[\frac{2t^3}{3}+\frac{t^2}{2}i\right]_0^1 = 2i\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i\right)\\ &= \mathbf{\frac{1}{3}(4i-3)}\end{aligned}$$

(3) $f(x+yi) = x + y^2 i,\ C: z(t) = t^2 - ti,\ -1 \leqq t \leqq 1$

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_{-1}^1 (t^2+t^2 i)(2t-i)\,dt\\ &= (1+i)\int_{-1}^1 (2t^3 - t^2 i)\,dt\\ &= (1+i)\left[\frac{t^4}{2}-\frac{t^2}{3}i\right]_{-1}^1\\ &= (1+i)\times\left(-\frac{i}{3}\right)\times 2\\ &= \mathbf{\frac{2}{3}(1-i)}\end{aligned}$$

2 次の関数 $f(z) = u(x,y) + v(x,y)\,i$ が正則か否か，判定しなさい．正則であれば，導関数 $f'(z)$ を求めなさい．【各 3 点】

(1) $f(z) = x(x^2-3y^2) + y(3x^2-y^2)\,i$

$u(x,y) = x(x^2-3y^2), v(x,y) = y(3x^2-y^2)$ とおくと

$$u_x(x,y) = 3x^2-3y^2 = v_y(x,y),$$
$$u_y(x,y) = -6xy = -v_x(x,y).$$

よって，コーシー・リーマンの方程式を満たすので，$f(z)$ は**正則である**．導関数は

$$f'(z) = \mathbf{(3x^2-3y^2)+6xy\,i}$$

である．

部分点 コーシー・リーマンの方程式が成り立つこと示していれば【2 点】，導関数を正しく書いていれば【1 点】加点する．

(2) $f(z) = (x^2-y^2+2xy) + (y^2-x^2-2xy)\,i$

$u(x,y) = x^2-y^2+2xy, v(x,y) = y^2-x^2-2xy$ とおくと

$$u_x(x,y) = 2x+2y \neq 2y-2x = v_y(x,y)$$

より，コーシー・リーマンの方程式を満たさない．
よって，$f(z)$ は**正則ではない**．

3 関数 $f(z) = \frac{1}{z+1}$ を $f(x+yi) = u(x,y)+v(x,y)\,i$ と表すとき，実部 $u(x,y)$ および虚部 $v(x,y)$ を求めなさい．【3 点】

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+1} &= \frac{1}{x+yi+1} = \frac{1}{(x+1)+yi}\\ &= \frac{(x+1)-yi}{(x+1)^2+y^2}\\ &= \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2} - \frac{y}{(x+1)^2+y^2}i.\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{cases} u(x,y) = \mathbf{\dfrac{x+1}{(x+1)^2+y^2}}\\ v(x,y) = -\mathbf{\dfrac{y}{(x+1)^2+y^2}}\end{cases}$$

4 次の正則関数 $f(z)$ に対し，導関数を求めなさい．【各 3 点】

(1) $f(z) = (3z^2 + iz - 1)^3$

$$f'(z) = \mathbf{3(3z^2 + iz - 1)^2(6z + i)}$$

(2) $f(z) = \dfrac{2}{z+1}$

$$f'(z) = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{(z+1)^2}}$$

5 $z = 1 + i$ の 4 乗根をすべて求めなさい．【4 点】

$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ の 4 乗根を $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおくと

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = z = w^4 = r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)$$

より，

$$r^4 = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}, \quad 4\theta = \frac{\pi}{4} + 2n\pi,$$

すなわち，

$$r = 2^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{16} + \frac{n\pi}{2} \ (n = 0, 1, 2, 3)$$

である．よって，z の 4 乗根は

$$\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right),\ \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i\sin\frac{9\pi}{16}\right),$$

$$\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + i\sin\frac{17\pi}{16}\right),\ \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i\sin\frac{25\pi}{16}\right)$$

の 4 つである．

部分点

- z の極形式が正しく書けている．【1 点】
- z の 4 乗根 w の絶対値 r と偏角 θ が満たす式が正しく書けている．【1 点】
- r と θ のどちらか一方のみ正しく導けている．【1 点】

6 次の複素数の (i) **実部**と**虚部**，または (ii) **絶対値**と**偏角**のいずれかを求めなさい．

【各 3 点】

(1) $z = 2(4 + 3i) - (9 + 4i)$

$z = -1 + 2i$．よって，
(i) 実部は $\mathbf{-1}$，虚部は $\mathbf{2}$．
(ii) 絶対値は $\sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \mathbf{\sqrt{5}}$，偏角は $\mathbf{\tan^{-1}(-2)}$．

(2) $z = (7 - 3i)(4 + 5i)$

$z = 28 + 35i - 12i - 15i^2 = 43 + 23i$．
よって，
(i) 実部は $\mathbf{43}$，虚部は $\mathbf{23}$．
(ii) 絶対値は $\sqrt{43^2 + 23^2} = \mathbf{\sqrt{2378}}$，偏角は $\mathbf{\tan^{-1}\dfrac{23}{43}}$．

(3) $z = \dfrac{12 + 2i}{1 + i}$

$$z = \frac{2(6 + i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{2(6 - 6i + i - i^2)}{1 - i^2} = 7 - 5i.$$

よって，
(i) 実部は $\mathbf{7}$，虚部は $\mathbf{-5}$．
(ii) 絶対値は $\sqrt{7^2 + (-5)^2} = \mathbf{\sqrt{74}}$，偏角は $\mathbf{\tan^{-1}\left(-\dfrac{5}{7}\right)}$．

(4) $z = \left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)^4$

$$z = \cos\frac{4\pi}{12} + i\sin\frac{4\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

よって，
(i) 実部は $\cos\dfrac{\pi}{3} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$，虚部は $\sin\dfrac{\pi}{3} = \mathbf{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$．
(ii) 絶対値は $\mathbf{1}$，偏角は $\mathbf{\dfrac{\pi}{3}}$．

部分点 $z = a + bi$ の形に正しく変形していれば【1 点】，実部または虚部，絶対値または偏角の一方のみ正しい場合は，それぞれ【1 点】加点する．