科 目 名　複素関数論　　出 題 者 名　佐藤 弘康

$\boxed{1}$ 次の問に答えなさい.

(1) $z=a$ が関数 $f(z)$ の k 位の極ならば,

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-a)^k}$$

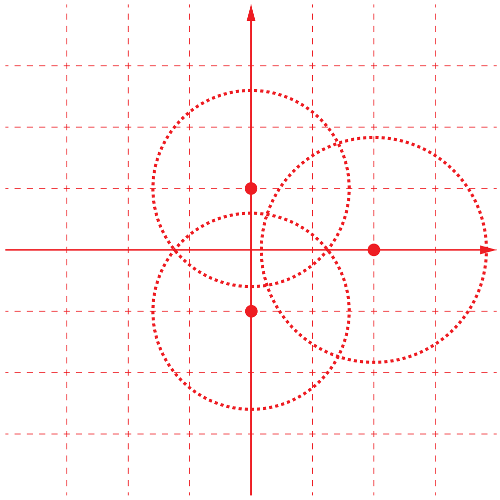
と表すことができる. ただし, $g(z)$ は $z=a$ の近傍で $\boxed{\text{正則}}$ かつ $\boxed{g(a)\neq 0}$ をみたす関数である. また, この逆の主張も成り立つ.
空欄に当てはまる適切な語句, または数式を答えなさい.【各 1 点】

(2) 関数

$$f(z)=\frac{\sin z}{z(z^2+1)(z-2)^2}$$

のすべての極とその位数を答えなさい.

$f(z)$ の分子 $\sin z$ は複素数平面全体で正則で, 分母が $z(z^2+1)(z-2)^2=0$ となるのは, $z=0,2,\pm i$ である. よって, これらの 4 点について何位の極か考察する.



$z=0$　$g(z)=z^kf(z)=\dfrac{z^{k-1}\sin z}{(z^2+1)(z-2)^2}$ とおくと, どんな $k\geqq 1$ に対しても, $g(0)=0$ となるため, **$z=0$ は極ではない**（除去可能特異点である）.【2 点】

$z=2$　$g(z)=(z-2)^2f(z)=\dfrac{\sin z}{z(z^2+1)}$ とおくと, $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-2)^2}$, $g(2)\neq 0$ かつ $z=2$ を中心とする半径 $R<\sqrt{5}$ の円の内部の領域で $g(z)$ は正則である.
よって, **$z=2$ は 2 位の極**である.【2 点】

$z=i$　$g(z)=(z-i)f(z)=\dfrac{\sin z}{z(z+i)(z-2)^2}$ とおくと, $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-i)}$, $g(i)\neq 0$ かつ $z=i$ を中心とする半径 $R<2$ の円の内部の領域で $g(z)$ は正則である.
よって, **$z=i$ は 1 位の極**である.【2 点】

$z=-i$　$g(z)=(z+i)f(z)=\dfrac{\sin z}{z(z-i)(z-2)^2}$ とおくと, $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z+i)}$, $g(-i)\neq 0$ かつ $z=-i$ を中心とする半径 $R<2$ の円の内部の領域で $g(z)$ は正則である.
よって, **$z=-i$ は 1 位の極**である.【2 点】

$\boxed{2}$ 次の問に答えなさい.

(1) 複素関数 $f(z)$ の孤立特異点 $z=a$ に対し,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz$$

を「$f(z)$ の $z=a$ における**留数**」という.
留数の定義式にある C はどのような曲線か答えなさい.

C は単一閉曲線で, C の内部に含まれる $f(z)$ の孤立特異点は $z=a$ のみである曲線（例えば, $z=a$ を中心とし, 十分小さい半径の円周）.【2 点】

(2) 「ローラン展開」を用いて, 留数を説明（定義）しなさい.

$f(z)$ を $z=a$ を中心にローラン展開したときの $\dfrac{1}{(z-a)}$ の係数.【2 点】

(3) $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z+2i)}$ の特異点 $z=-2i$ における留数を求めなさい.

$z=-2i$ は $f(z)$ の 1 位の極である. よって

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f(z),-2i]&=\lim_{z\to -2i}(z+2i)\,f(z)\\&=\lim_{z\to -2i}\frac{1}{z^2}\\&=\frac{1}{4i^2}\\&=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}.\end{aligned}$$
【6 点】

（部分点） $\boxed{1}$(2) および $\boxed{2}$(3) については, 指示されたものを求めているが, それ以外についても言及している場合は, 3 点を加点する（例えば, 極を尋ねられているのに留数を答えている, など）. 軽微な計算ミス等についても 3 点加点する.

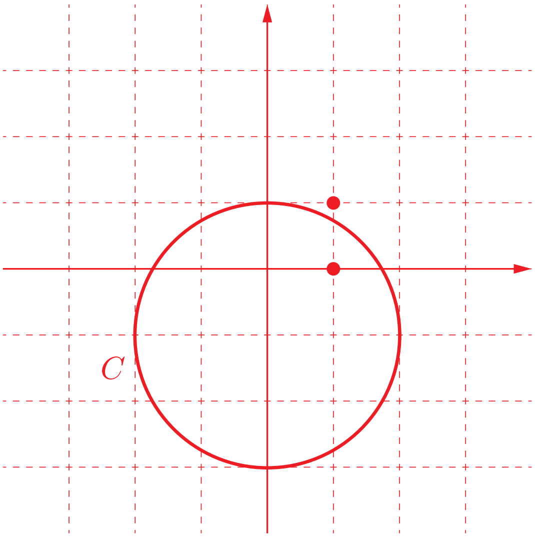
$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の関数 $f(z)$ と単一閉曲線 C に対し，複素積分

$$\int_C f(z)\,dz$$

を求めなさい．

(1) $f(z) = \dfrac{1}{(z-(1+i))(z-1)} \quad C : |z+i| = 2$

C は，中心が $-i$ で，半径が 2 の円周である．$f(z)$ の特異点は 1 と $1+i$ だが，C の内部に含まれるのは 1 のみである．



よって，留数定理より

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),1].$$

ここで，

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f(z),1] &= \lim_{z\to 1}(z-1)\,f(z)\\ &= \lim_{z\to 1}\frac{1}{z-(1+i)}\\ &= \frac{1}{-i} = i.\end{aligned}$$

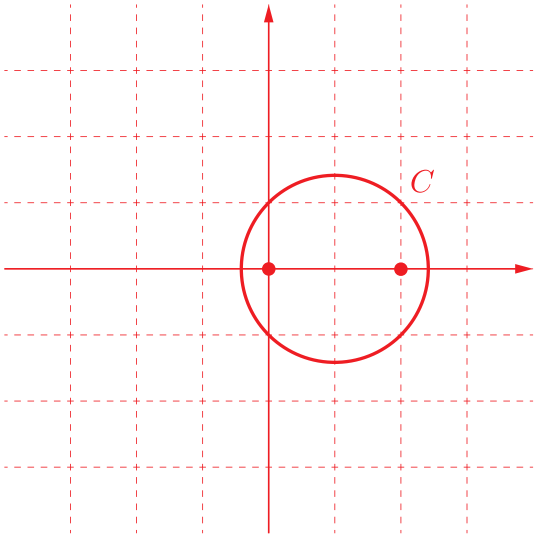
よって，

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i^2 = \boldsymbol{-2\pi}.\quad 【10点】$$

（部分点） $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ について，軽微な計算ミスは 2 点減点する．また，単一閉曲線 C と $f(x)$ の特異点の図が正しく描けていれば 2 点加点し，1 つの留数を正しく求めていれば 4 点加点する．

(2) $f(z) = \dfrac{z+1}{z(z-2)^2} \quad C : |z-1| = \sqrt{2}$

C は，中心が 1 で，半径が $\sqrt{2}$ の円周である．$f(z)$ の特異点は 0 と 2 であり，どちらも C の内部に含まれる．



よって，留数定理より

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\,(\mathrm{Res}[f(z),0] + \mathrm{Res}[f(z),2])$$

である．

$z=0$ は $f(z)$ の 1 位の極なので，

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f(z),0] &= \lim_{z\to 0} z\,f(z)\\ &= \lim_{z\to 0}\frac{z+1}{(z-2)^2}\\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

一方，$z=2$ は $f(z)$ の 2 位の極なので，

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f(z),2] &= \lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}\left\{(z-2)^2 f(z)\right\}\\ &= \lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}\left(\frac{z+1}{z}\right)\\ &= \lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}\left(1+\frac{1}{z}\right)\\ &= \lim_{z\to 2}\left(-\frac{1}{z^2}\right)\\ &= -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

したがって，

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right) = \mathbf{0}.\quad 【10点】$$