【復習】行列の対角化

行列の対角化

正方行列 A に対して, 適当に正則行列 P を選んで, $P^{-1}AP$ を対角行列

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

にすることを「行列の対角化」という.

- 行列 $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}$ の列ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ は, A の**固有ベクトル**であり, 右辺の対角成分 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ は, A の**固有値**である（$A\boldsymbol{x}_i = \lambda_i \boldsymbol{x}_i$）.
- 任意の正方行列が対角化できるとは限らない.

【復習】対称行列の対角化

定理 ([M, p.189 **定理** 3] [PS, p.167 VII]).

任意の対称行列は, 直交行列で対角化可能である. つまり, 行列 A が対称行列ならば,

$$
{}^{t}PAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}
$$

を満たす直交行列 P が必ず存在する.

$\boxed{\text{今回の目標}}$

「対称行列の対角化」を活用して, 「２次形式の標準化」の考え方を理解する.

２次形式とその行列表示

定義 ([M, p.194] [PS, p.169]).

定数 a, b, h に対し,

$$ax^2 + 2hxy + by^2$$

の形の式を, x, y に関する**２次形式**という.

２次形式は

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$$

と, 行列を用いて表すことができる. ここで $A = \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

例）[M, p.197 例 1] [PS, p.169 例 1] を参照.

２次形式の標準化の考え方

- $ax^2 + 2hxy + by^2 = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ と行列表示したときの行列 $A = \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$ は，対称行列である．したがって，...
- ${}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ となる直交行列 P が存在する．このとき，...

$$
\begin{aligned}
ax^2 + 2hxy + by^2 = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} &= {}^t\boldsymbol{x}\left(P\,{}^tP\right)A\left(P\,{}^tP\right)\boldsymbol{x} \\
&= {}^t\boldsymbol{x}P\left({}^tPAP\right){}^tP\boldsymbol{x} = {}^t\left({}^tP\boldsymbol{x}\right)\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\left({}^tP\boldsymbol{x}\right)
\end{aligned}
$$

となる．ただし，行列の積と転置の性質 ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ を使っている．

- つまり，${}^tP\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ とおくと，$ax^2 + 2hxy + by^2 = \alpha X^2 + \beta Y^2$ となる．これを２次形式の標準形という．

２次形式の標準化

２次形式の標準化 ([M, p.196 **定理** 2] [PS, p.170])

2 **次形式** $ax^2 + 2hxy + by^2$ **は, 適当な直交行列** P **で,** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ **と変換することにより, 標準化できる;**

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = \alpha X^2 + \beta Y^2$$

- α, β **は,** 2 **次形式** $ax^2 + 2hxy + by^2$ **の係数行列** $A = \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$ **の固有値.**
- **対称行列** A **は直交行列** P **により,** ${}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ **と対角化される.**

例）[M, p.197 例 1] [PS, p.171 例題 1] を参照.

２次形式の標準化の応用（１）２次曲線の分類

２次曲線 ([M, p.210] [PS, p.173])

x, y の 2 次方程式

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

によって表される xy-平面内の曲線（方程式を満たす点 (x, y) の全体）を **2次曲線**という. ただし, a, b, c, f, g, h は定数.

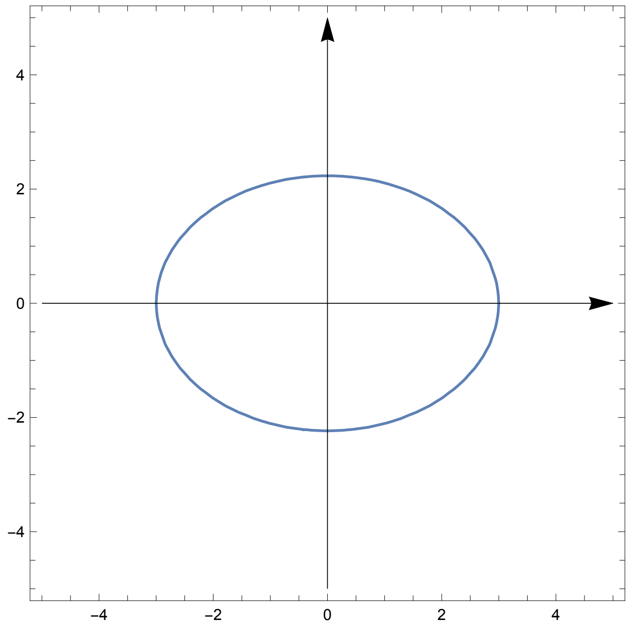
２次形式の標準化の応用（１）２次曲線の分類

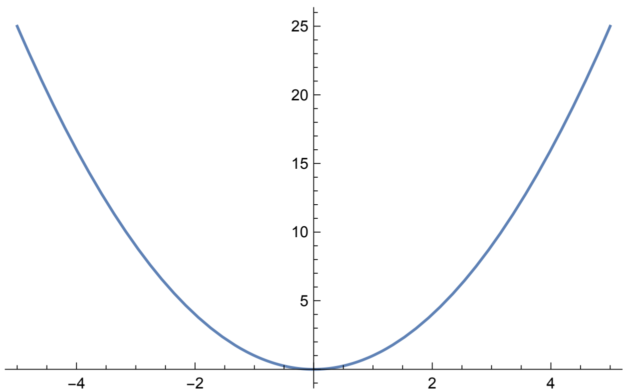
２次曲線 ([M, p.210] [PS, p.173])

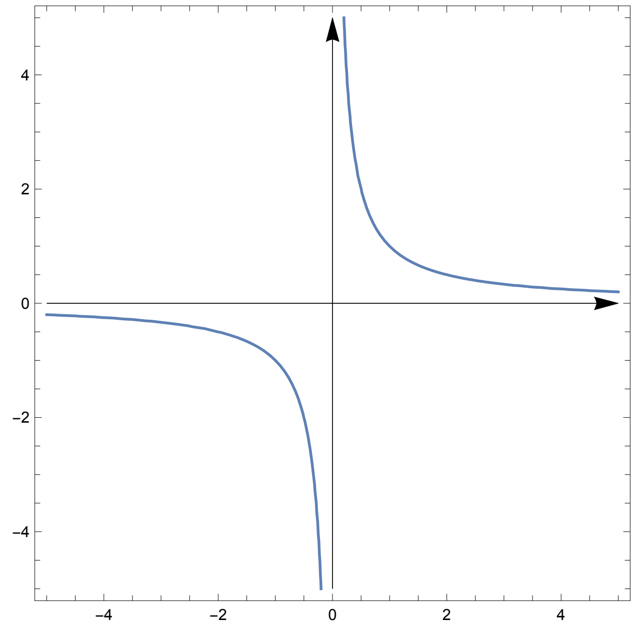
$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

例）

(i) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$　　(ii) $y = x^2$　　(iii) $xy = 1$







２次形式の標準化の応用（１）２次曲線の分類

事実.

２次曲線は, 特異な場合を除けば,

(i) **楕円** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$,　(ii) **放物線** $y = ax^2$,　(iii) **双曲線** $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

のいずれかである.

- ここで, "特異な場合" とは, ...
  - $(x, y$ の 1 次式$)(x, y$ の 1 次式$) = 0$
  - 方程式を満たす点が１点のみの場合（例えば, $x^2 + y^2 = 0$）
  - 方程式を満たす点が存在しない場合（例えば, $x^2 + y^2 = -1$）
- [M, p.212–216] は, ２次曲線の詳細な分類法について言及している.

２次形式の標準化の応用（１）２次曲線の分類

(1) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ の２次形式の部分を行列表示;

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2gx + 2fy + c = 0$$

(2) ２次形式の行列 $A = \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$ を直交行列 P で対角化する. すなわち,

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix}$ と変換すると, . . .

$$\longrightarrow \alpha \bar{X}^2 + \beta \bar{Y}^2 + 2g' \bar{X} + 2f' \bar{Y} + c = 0$$

(3-1) $\underline{\alpha, \beta \text{ がともに } 0 \text{ でない}}$とき, $X = \bar{X} + \dfrac{g'}{\alpha}$, $Y = \bar{Y} + \dfrac{f'}{\beta}$ とおくと, . . .

$\longrightarrow \alpha X^2 + \beta Y^2 + c' = 0$（この場合は, 楕円か双曲線）

(3-2) $\underline{\alpha, \beta \text{ の一方が } 0}$（例えば $\beta = 0$）のときも同様に式変形すると, . . .

$\longrightarrow Y = \alpha' X^2$（この場合は, 放物線）

２次形式の標準化の応用（1）２次曲線の分類

何をしているのか？

- (2) の変換：($|P| = 1$ ならば) 座標軸の**回転**

  ([M, p.208–210 §34.1], [PS, p.172–173] を参照)
- (3) の変換：座標軸の**平行移動**

例）[M, p.216 例.] [PS, p.179 例題 2] を参照.

２次形式の標準化の応用（２）２変数関数の極値の判定

定理.（「微分積分」p.244 [II], p.245 [III]）

(1)「$f(x,y)$ が点 (a,b) で極値をとる」 $\Longrightarrow$ $f_x(a,b)=0$ かつ $f_y(a,b)=0$

(2) $D(x,y) := \{f_{xy}(x,y)\}^2 - f_{xx}(x,y)\,f_{yy}(x,y)$ とおく.

$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ を満たす $(x,y)=(a,b)$ に対し,

- $D(a,b)<0$ かつ $\begin{cases} f_{xx}(a,b)<0 & \Longrightarrow & f(a,b) \text{ は極大値} \\ f_{xx}(a,b)>0 & \Longrightarrow & f(a,b) \text{ は極小値} \end{cases}$
- $D(a,b)>0$ のとき, $f(a,b)$ は極値ではない.
- $D(a,b)=0$ のとき, $f(a,b)$ が極値となるときも, そうならないときもある.

２次形式の標準化の応用（２）２変数関数の極値の判定

考え方

- $f(x, y)$ が点 $(x, y) = (a, b)$ で極値をとるならば,
  $F(t) := f(a + ht, b + kt)$ は任意の h, k に対し, $t = 0$ で極値をとる.
- よって,（任意の h, k に対し）$F'(0) = 0$ （$\longrightarrow$ 定理 (1)）
- （任意の h, k に対し）$F'(0) = 0$ かつ $\begin{cases} F''(0) < 0 & \Longrightarrow \quad F(0) \text{ は極大値} \\ F''(0) > 0 & \Longrightarrow \quad F(0) \text{ は極小値} \end{cases}$
  （$\longrightarrow$ 定理 (2)）
- 以上の事実から, $F''(0)$ の符号によって極大か極小かが判定できる.
- 合成関数の微分の公式から,

$$F''(0) = f_{xx}(a, b)\, h^2 + 2f_{xy}(a, b)\, hk + f_{yy}(a, b)\, k^2$$

これは h, k に関する２次形式である.

２次形式の標準化の応用（２）２変数関数の極値の判定

- 合成関数の微分の公式から,

$$
\begin{aligned}
F''(0) &= f_{xx}(a,b)\,h^2 + 2f_{xy}(a,b)\,hk + f_{yy}(a,b)\,k^2 \\
&= \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} H & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix} = \alpha H^2 + \beta K^2.
\end{aligned}
$$

よって, $f(x,y)$ のヘッセ行列 $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$ の固有値 α, β が, ...

(1) どちらも正ならば, $f(a,b)$ は極小

(2) どちらも負ならば, $f(a,b)$ は極大

(3) 符号が異なるときは, 点 (a,b) で極値をとらない.