【復習】行列の固有値と固有ベクトル

定義

正方行列 A に対し, $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ を満たすスカラー λ を「A の**固有値**」といい, ベクトル $\boldsymbol{x}$ を「固有値 λ に対する**固有ベクトル**」という. ただし, $\boldsymbol{x}$ は零ベクトルではないとする.

事実 2次正方行列 A の固有値を λ_1, λ_2 とし, 対応する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ とする. $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ のとき, $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ が正則ならば,

$$AP = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{すなわち,} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ.

行列の対角化

行列の対角化

正方行列 A に対して, 適当に正則行列 P を選んで, $P^{-1}AP$ **を対角行列にすること**を「行列の対角化」という.

注意

- $P^{-1}AP$ が対角行列になるような行列 P は一意的に定まるものではない.
  (P は A の固有ベクトルを用いて構成. 選び方は一意ではない)
- $P^{-1}AP$ が対角行列となるとき, その対角成分は A の固有値である.
  (対角成分の並び方は, P の構成に依る)

行列の対角化の考え方

- 行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ とする.
- 対応する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots$ とする.
- 固有ベクトル達を並べて行列 $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots \end{pmatrix}$ をつくる.
- これらは $A\boldsymbol{x}_i = \lambda_i\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ を満たすので,

$$\begin{aligned} AP &= A\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x}_1 & A\boldsymbol{x}_2 & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\boldsymbol{x}_1 & \lambda_2\boldsymbol{x}_2 & \cdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- P が正則ならば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$ と対角行列になる.

行列の対角化の手順

行列 A を対角化するには…

(ステップ 1) A の固有値・固有ベクトルを求める.

(ステップ 2) 固有ベクトルを並べて正則行列 $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots \end{pmatrix}$ をつくる.

(ステップ 3) $P^{-1}AP$ は, **対角成分に A の固有値を並べた対角行列**となる.
(ただし, 並び方は P の固有ベクトルの並び順と同じ)

注意

- 全固有値の積は, 行列式 $|A|$ の値に等しい.
- すべての正方行列が対角化できるとは限らない.
  例）回転 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, せん断 $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は対角化不可能.
- 任意の**対称行列**は対角化可能である.

対称行列の対角化・対角化の応用（1）

定理.

任意の対称行列は, **直交行列**で対角化可能である. つまり, 行列 A が対称行列ならば, ${}^tPP = E$ かつ ${}^tPAP$ が対角行列となるような正則行列 P が存在する.

(1) 2次形式の標準化：${}^tP\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, $P\,{}^tP = E$ のとき,

$$\begin{aligned} &ax^2+2bxy+cy^2 \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}P\,{}^tP\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}P\,{}^tP\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \alpha X^2 + \beta Y^2 \end{aligned}$$

(2 次形式の標準形)

対角化の応用（2）

(2) 2変数関数 $f(x,y)$ の極値の判定：$F(t) = f(a+ht, b+kt)$ に対し,

$$\begin{aligned} F''(0) &= f_{xx}(a,b)h^2 + 2f_{xy}(a,b)hk + f_{yy}(a,b)k^2 \\ &= \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} H & K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix} = \alpha H^2 + \beta K^2. \end{aligned}$$

よって, $f(x,y)$ の**ヘッセ行列**の固有値 α, β が,
(i) どちらも正ならば $f(a,b)$ は極小, (ii) どちらも負ならば極大,
(iii) 符号が異なるときは極値にはならない.

(3) A^m の計算：$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ならば, $A^m = P\begin{pmatrix} \alpha^m & 0 \\ 0 & \beta^m \end{pmatrix}P^{-1}$ である.

(4) 微分方程式の解法への応用（詳細は割愛）