行列の固有値と固有ベクトル

定義

正方行列 A に対し, 等式 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ を満たす

- スカラー λ を「A の固有値」といい,
- ベクトル $\boldsymbol{x}$ を「A の固有値 λ に対する固有ベクトル」という.

ただし, $\boldsymbol{x}$ は零ベクトルではないとする.

【2次の場合】

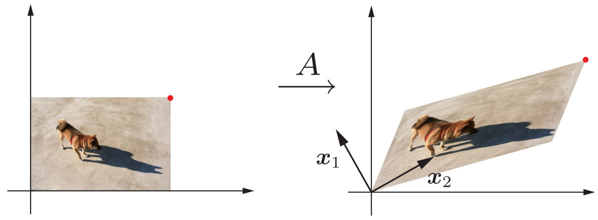
行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルとは,

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たすスカラー λ と, ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のこと.

固有値・固有ベクトルの意味（1 次変換において）

例）$A = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 31 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 21 \end{pmatrix}$ の固有値は $\frac{2}{3}$ と $\frac{3}{2}$.

$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ はそれぞれ対応する固有ベクトルである.



固有値の性質

- 固有値・固有ベクトルの定義式を次のように変形;

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} - \lambda\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} - \lambda E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow (A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

- 仮に, 行列 $(A - \lambda E)$ が正則ならば, 逆行列 $(A - \lambda E)^{-1}$ が存在する.
- $(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の両辺に, 左から $(A - \lambda E)^{-1}$ をかけると,

$$\boldsymbol{x} = E\boldsymbol{x} = (A - \lambda E)^{-1}(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = (A - \lambda E)^{-1}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

  よって, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる.（これは, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ に矛盾）

- つまり, λ が A の固有値ならば, 行列 $(A - \lambda E)$ は正則ではない.

固有値の性質

λ が A の固有値である $\Longleftrightarrow$ $(A - \lambda E)$ は正則ではない $\Longleftrightarrow$ $|A - \lambda E| = 0$

固有方程式

- 一般に, A が n 次正方行列ならば, $|A - \lambda E|$ は λ に関する n 次多項式.
- つまり, A の固有値は, n 次方程式 $|A - \lambda E| = 0$ の解である.
  （この方程式を固有方程式とよぶ）

固有値の性質（求め方）

λ が A の固有値である $\Longleftrightarrow$ λ は固有方程式 $|A - \lambda E| = 0$ の解である.

固有ベクトルの性質

- 行列 A の固有値 λ に対応する固有ベクトルは

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad (*)$$

  を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$（ただし, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$）.

- $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \vdots \end{pmatrix}$ とおくと, $(*)$ は, $x, y, \ldots$ の連立 1 次方程式となる.
  $\longrightarrow$ 連立 1 次方程式の解が固有ベクトルである.
- 一般に, $\boldsymbol{x}$ が行列 A の固有値 λ に対応する固有ベクトルならば,
  そのスカラー倍 $k\boldsymbol{x}$ も A の固有値 λ に対応する固有ベクトルである.
  $\longrightarrow$ 固有ベクトルは一意的に定まるものではない（無数にある）.

固有値・固有ベクトルを求める手順

(ステップ 1) 固有方程式

$$|A - \lambda E| = 0$$

の解 λ（$\leftarrow$ 固有値）を求める.

(ステップ 2) (1) で求めた各固有値 λ に対して, 連立 1 次方程式

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

の解 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \vdots \end{pmatrix}$（$\leftarrow$ 固有ベクトル）を求める.