

## 行列式とは

- 正方行列  $A$  に対して定まる値 (数) のこと。  
(行列  $A$  の行列式を,  $|A|$  や  $\det(A)$  と表す)
- 厳密な定義 (2通りあるが, この授業では扱わない)
  - 順列とその転倒数 (符号) を用いた定義:  $A = (a_{ij})$  に対して

$$|A| = \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} \text{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n) a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n}$$

(教科書 p.128~131 を参照)

- 次の3つの条件を満たすもの:
  - (1) 行 (または列) に関して線形である
  - (2) 行 (または列) に関して交代的である.
  - (3)  $|E| = 1$

## サラスの方法

- 2次, 3次正方行列の場合は, サラスの方法がある.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

## 行列式の効用 (1)

- 逆行列: 2次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  の逆行列は  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
- 正則性の判定: 正方行列  $A$  が正則  $\iff |A| \neq 0$
- 2変数関数  $f(x, y)$  の極値の判定:  $F(t) = f(a + ht, b + kt)$  に対し,

$$\begin{aligned} F''(0) &= f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2 \\ &= f_{xx}(a, b) \left\{ \left( h + \frac{f_{xy}(a, b)}{f_{xx}(a, b)} \cdot k \right)^2 - \frac{\{f_{xy}(a, b)\}^2 - f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b)}{\{f_{xx}(a, b)\}^2} \cdot k^2 \right\} \\ &= f_{xx}(a, b) \left\{ \left( h + \frac{f_{xy}(a, b)}{f_{xx}(a, b)} \cdot k \right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix}}{\{f_{xx}(a, b)\}^2} \cdot k^2 \right\} \end{aligned}$$

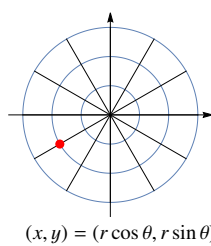
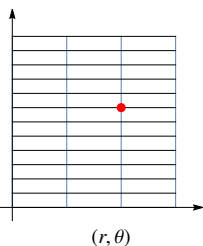
## 行列式の効用 (2)

- ベクトル  $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  に対し,  $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$  とおくと,  
「 $a$  と  $b$  を2辺とする平行四辺形の面積」は, 「 $|A|$  の絶対値」の等しい.

$$\begin{aligned} \therefore (\text{面積}) &= \|a\| \|b\| \sin \theta = \|a\| \|b\| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{\|a\|^2 \|b\|^2 (1 - \cos^2 \theta)} = \sqrt{\|a\|^2 \|b\|^2 - \|a\|^2 \|b\|^2 \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{\|a\|^2 \|b\|^2 - (\|a\| \|b\| \cos \theta)^2} = \sqrt{\|a\|^2 \|b\|^2 - \langle a, b \rangle^2} \\ &= \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 \{(b_1)^2 + (b_2)^2\} - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2} \\ &\quad \vdots \\ &= \sqrt{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} = \sqrt{|A|^2}. \end{aligned}$$

## 行列式の効用 (3)

- 変数変換 (座標変換) のヤコビ行列式



ヤコビ行列式  $\begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix}$  は, 局所的な面積の変化率 (比) と解釈できる.

## 行列式の基本性質

- [性質 1]  $|^t A| = |A|$  (つまり, 行に関する性質は, 列についても成立する)
- [性質 2] 1つの行 (列) を  $c$  倍した行列式の値は, もとの行列式の  $c$  倍になる.
- [性質 3]
  - ([性質 2] [性質 3] を行列式の線形性という)
- [性質 4] 2つの行 (列) を入れ替えた行列式は, 元の行列式の  $(-1)$  倍に等しい.  
([性質 4] を行列式の交代性という)
- [性質 5]  $\iff$  [性質 4]
- [性質 6]  $\iff$  [性質 2] [性質 3] [性質 5] 1つの行 (列) の  $c$  倍を他の行 (列) に加えた行列式の値は, 元の行列式の値に等しい.
- [性質 7]  $|AB| = |A| |B|$