

行列とは

- 行列とは？：数を格子状（矩形状）に並べたもの。数の配列。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- 行と列によって構成（行列を構成する数のことを成分という）
 - 行：横に並んだ数の集まり（上から第1行, 第2行, ...）
 - 列：縦に並んだ数の集まり（左から第1列, 第2列, ...）
 - 第 i 行と第 j 列に共通して含まれる成分を (i, j) 成分とよぶ。
 - 行列の型： m (行の数) \times n (列の数) 型行列
- 行列の相等：同じ型の行列 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ に対し, 対応するすべての成分が等しい（すなわち, $a_{ij} = b_{ij}$ ）とき, $A = B$ と表す。

行列の例（1）

- 表から数値を取りだしたもの（数表, 2次元データの相関表など）
- 点の座標 (x, y) , ベクトルの成分表示;

$$\text{行ベクトル } a = (a_1 \ \cdots \ a_n), \text{ 列ベクトル } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- 連立方程式から係数と定数項を取りだしたものを;

$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & \alpha \\ c & d & \beta \end{pmatrix}$$

- 2 (多) 変数関数 $f(x, y)$ のヘッセ行列;

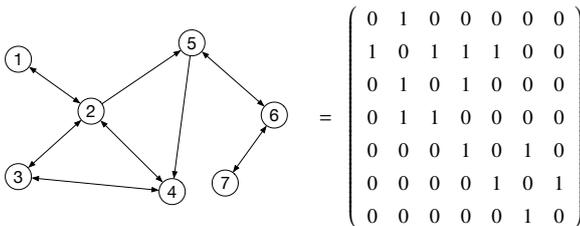
$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

- 変数変換 $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$ のヤコビ行列;

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix}$$

行列の例（2）

- グラフ（= 道, ネットワーク, 点のつながり方）の隣接行列



点①から点④へ1ステップで行ける $\rightarrow (i, j)$ 成分が1
 点①から点④へ1ステップでは行けない $\rightarrow (i, j)$ 成分が0

特別な行列（1）

- $n \times n$ 型行列を n 次正方行列とよぶ。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

（正方行列に対し, (i, i) 成分のことを対角成分とよぶ）

- 対角成分以外の成分がすべて0である正方行列を対角行列とよぶ。
- 対角成分がすべて1である対角行列を単位行列とよぶ。
 (E_1, E_2, E_3, \dots) または (I_1, I_2, I_3, \dots) など. 単に E, I と書くこともある
- すべての成分が0である行列を零行列とよぶ。
 $(O_{m,n}, O_{n,n} = O_n)$ など. 単に O と書くこともある

行列の演算（和, スカラー倍, 積）

和 同じ型の行列 A, B に対し, $A + B$ が定義できる。

- $(A + B)$ の (i, j) 成分 = (A) の (i, j) 成分 + (B) の (i, j) 成分。
- A, B が $m \times n$ 型ならば, $A + B$ も $m \times n$ 型。

スカラー倍 任意の型の行列 A と, 実数 λ に対し, λA が定義できる。

- (λA) の (i, j) 成分 = (A) の (i, j) 成分 $\times \lambda$ 。
- A が $m \times n$ 型ならば, λA も $m \times n$ 型。

積 A の列の数と B の行の数が同じとき, AB が定義できる。

- (AB) の (i, j) 成分 \cdots (A) の第 i 行) と (B) の第 j 列) によって構成。
 (定義の詳細は, 教科書 p.111 を参照)
- A が $m \times n$ 型で, B が $n \times l$ 型ならば, AB は $m \times l$ 型。

行列の積の意味

- 点の移動や変換（線形写像, 1次変換）;

$$\text{例) } x \text{ 軸に関する対称移動: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- 連立方程式の行列表示;

$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

- ベクトルの内積; $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対し,

$$\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} (= \|a\| \|b\| \cos \theta)$$

- グラフの隣接行列 M の n 乗 M^n の (i, j) 成分は, 「点①から点④へ, n ステップで到達する経路の個数」を表す。