

1 変数関数の積分：不定積分

不定積分

- 関数 $f(x)$ に対し、 $F'(x) = f(x)$ を満たす関数 $F(x)$ のことを「 $f(x)$ の原始関数」という。
- $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数ならば、任意の定数 C を加えた関数 $F(x) + C$ も $f(x)$ の原始関数である。
(つまり、 $f(x)$ の原始関数は一意には決まらず、無数にある)
- $F(x) + C$ のことを「 $f(x)$ の不定積分」とよび、 $\int f(x) dx$ と書く；

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (C \text{ を積分定数とよぶ})$$

- つまり、不定積分とは「 $f(x)$ の原始関数全体を表すもの」と解釈できる。

1 変数関数の積分：定積分 (リーマン和)

リーマン和

- $f(x)$: 区間 $[a, b]$ で定義された有界関数 (つまり、 $|f(x)| < K$ を満たす)
- 区間 $[a, b]$ を n 個の小区間に分割。つまり、
 - 区間内に $(n-1)$ 個の分点を選ぶ； $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$
(このような大小関係をもつ点を「 $[a, b]$ の分割」とよび、 Δ と書く)
 - $[a, b]$ は $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$) に分割される。
分割 Δ のノルム $\|\Delta\| := \max_k (x_k - x_{k-1})$ (小区間の幅の最大値)
- 各小区間 I_k から ξ_k を適当に選ぶ (つまり、 $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$) .
- 次の和をリーマン和という；

$$R(\Delta; \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

1 変数関数の積分：定積分 (定義)

定積分

- $f(x)$ のリーマン和の極限

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} R(\Delta; \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

が、分割 Δ と点 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ の選び方に依らずに一定値 I に収束するとき、この I を「 $f(x)$ の $[a, b]$ における定積分」とよび、

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

と書く。

- $f(x) \geq 0$ かつ連続関数ならば、 $\int_a^b f(x) dx$ は、「平面内の曲線 $y = f(x)$ と、3つの直線 $x = a, x = b, x$ 軸で囲まれた領域」の面積と解釈できる。

1 変数関数の積分：定積分 (計算方法)

微分積分学の基本定理

$S(x) = \int_a^x f(t) dt$ とおく。このとき、 $S'(x) = f(x)$ が成り立つ。つまり、

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

- このことから、 $S(x)$ は $f(x)$ の原始関数のひとつであることがわかる。
つまり、 $S(x) = F(x) + C$ と書ける ($F(x)$ は $f(x)$ の原始関数、 C は定数) .
- (定義から) $S(a) = 0$ と定めると、 $C = -F(a)$ である。したがって、

$$\int_a^b f(x) dx = S(b) = F(b) + C = F(b) - F(a).$$

1 変数関数の積分：応用 (平面内の領域の面積)

- 区間 $[a, b]$ で $f(x) \geq 0$ ならば、定積分 $\int_a^b f(x) dx$ は、 $y = f(x)$ のグラフ (曲線) と、3つの直線 $x = a, x = b, x$ 軸で囲まれた図形の面積である。
- 2つの曲線 $y = f(x), y = g(x)$ と2つの直線 $x = a, x = b$ によって囲まれる図形の面積 S は
 - 区間 $[a, b]$ において、 $f(x) \geq g(x)$ ならば、 $S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$.
 - 一般に、 $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.
- ※定積分の性質 (p.85 定理 2.) を参照。
- (面積) $= \int_a^b (\text{長さ}) dx$.

2 変数関数の積分：2重積分 (定積分の2変数関数版)

- 2重積分とは、平面内の領域 Ω と2変数関数 $f(x, y)$ から定まる量。
- 累次積分 (定積分の繰り返し) によって求めることができる。

2重積分の計算

- 領域 Ω が $a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$ と表されるならば、

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right\} dx.$$

- 領域 Ω が $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), \alpha \leq y \leq \beta$ と表されるならば、

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right\} dy.$$