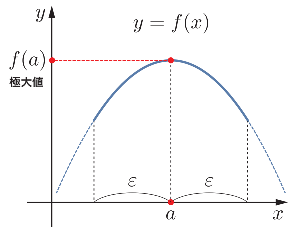
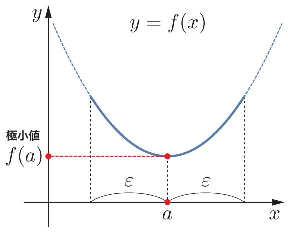
1 変数関数の極値

極値とは？　局所的な最大値, または最小値のこと.





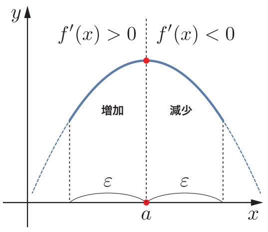
- 厳密に言うと,

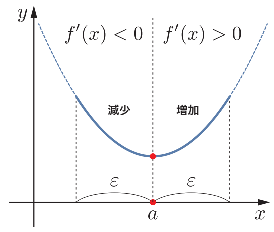
  $f(a)$ が関数 $f(x)$ の極大値 $\iff$ 「$0 < |h| < \varepsilon$ ならば, $f(a) > f(a+h)$」

  $f(a)$ が関数 $f(x)$ の極小値 $\iff$ 「$0 < |h| < \varepsilon$ ならば, $f(a) < f(a+h)$」
- 極大値と極小値を合わせて「極値」という.

1 変数関数の極値

極値とは？　関数の増減が入れかわる点のこと.





- $f(x)$ が $x = a$ で極大値をとるとする. $h > 0$ に対し,
  - $a - h < x < a$ においては, $f(x)$ は増加関数なので, $f'(x) > 0$
  - $a < x < a + h$ においては, $f(x)$ は減少関数なので, $f'(x) < 0$

  よって, このとき, $f'(a) = 0$ である（極小の場合も同様）.

関数の増減とその導関数の符号

定義　関数 $f(x)$ がある区間で単調増加（減少）関数である.

$\iff x_1 < x_2$ ならば, $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ が成り立つ.

事実　ある区間で $f'(x)\begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$ ならば, $f(x)$ は $\begin{cases} \text{増加関数} \\ \text{減少関数} \end{cases}$ である.

- 証明は「平均値の定理（p.46 定理 8.）」を用いる.
- 逆の主張は次のようにして確かめることができる;

  $x = x_0$ のまわりで $f(x)$ が増加関数ならば,
  - $h > 0$ のとき, $f(x_0) < f(x_0 + h)$, つまり $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0$
  - $h < 0$ のとき, $f(x_0 + h) < f(x_0)$, つまり $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0$

  いずれの場合も, $h \to 0$ とすれば, $f'(x_0)$ に収束. したがって, $f'(x_0) \geq 0$.

1 変数関数の極値（判定条件）

定理 1. (i)　「$f(x)$ が $x = a$ で極値をとる」 $\Longrightarrow$ $f'(a) = 0$

- 逆の主張『$f'(a) = 0 \Longrightarrow f(x)$ が $x = a$ で極値をとる』は正しくない！

  例）　$f(x) = x^3$ は $f'(0) = 0$ を満たすが, 単調増加関数（教科書 p.33）
- $f'(a) = 0$ のとき, テイラーの定理より, $x = a$ のまわりで

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c_x)}{2}(x-a)^2$$

  - c_x は, a と x の間にある数.（平均値の定理を思い出そう）
  - x が a に十分近い値ならば, c_x も当然 a に十分近い値である.
  - $f''(a) < 0$ ならば, $f''(x)$ の連続性より, $f''(c_x) < 0$.　$\therefore f(x) < f(a)$

定理 1. (ii)　$f'(a) = 0$ かつ $\begin{cases} f''(a) < 0 \\ f''(a) > 0 \end{cases} \Longrightarrow f(a)$ は $\begin{cases} \text{極大値} \\ \text{極小値} \end{cases}$

2 変数関数の極値

- $f(a, b)$ が関数 $f(x, y)$ の極大値

  $\iff$ 「$0 < |h|, |k| < \varepsilon$ ならば, $f(a, b) > f(a + h, b + k)$」

  $f(a, b)$ が関数 $f(x, y)$ の極小値

  $\iff$ 「$0 < |h|, |k| < \varepsilon$ ならば, $f(a, b) < f(a + h, b + k)$」
- $f(a, b)$ が関数 $f(x, y)$ の極値

  $\iff$（任意の h, k に対し）$F(t) = f(a + ht, b + kt)$ は, $t = 0$ で極値をとる.

定理 1. (i) を上の $F(t)$ に適用してみる.（定理 2. [I]）

(i)（任意の h, k に対し）$F(t)$ が $t = 0$ で極値をとる.

$\Longrightarrow$（任意の h, k に対し）$F'(0) = 0$

$\iff$（任意の h, k に対し）$f_x(a, b)\,h + f_y(a, b)\,k = 0$

$\iff$ $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$

2 変数関数の極値（判定条件）

定理 1. (ii) を上の $F(t)$ に適用してみる.（定理 2. [II]）

(ii)（任意の h, k に対し）$F'(0) = 0$ かつ $\begin{cases} F''(0) < 0 & \Longrightarrow F(0) \text{ は極大値} \\ F''(0) > 0 & \Longrightarrow F(0) \text{ は極小値} \end{cases}$

- 合成関数の微分の公式より,

$$F''(0) = f_{xx}(a, b)\,h^2 + 2f_{xy}(a, b)\,hk + f_{yy}(a, b)\,k^2 \quad (\leftarrow \text{平方完成する})$$

$$= f_{xx}(a, b)\left\{\left(h + \frac{f_{xy}(a, b)}{f_{xx}(a, b)} \cdot k\right)^2 - \frac{\{f_{xy}(a, b)\}^2 - f_{xx}(a, b)\,f_{yy}(a, b)}{\{f_{xx}(a, b)\}^2} \cdot k^2\right\}$$

- $D(a, b) > 0$ のとき：h, k の選び方によって $F''(0)$ を正にも負にもできる.
- $D(a, b) < 0$ のとき：$f(a, b)$ は極値となる.
- $D(a, b) = 0$ のとき：$f(a, b)$ が極値か否かは判定できない.