

【復習】1変数関数のべき級数展開

テイラー展開 関数 $f(x)$ が $x = a$ のまわりで連続かつ微分可能で、収束半径が ρ であるとする。このとき、 $a - \rho < x < a + \rho$ ならば、

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

マクローリン展開 特に、 $x = 0$ のまわりで級数展開すると

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

今回の目的

1変数関数のマクローリン展開と合成関数の考え方を利用して、2変数関数をべき級数展開する。

2変数関数のべき級数展開 (考え方)

2変数関数 $f(x, y)$ に対し、

1) $x(t) = a + ht, y(t) = b + kt$ (a, b, h, k は定数) との合成関数を考える;

$$F(t) := f(a + ht, b + kt)$$

2) $F(t)$ をマクローリン展開する;

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)}{2}t^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n + \cdots$$

3) $t = 1$ を代入する;

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \cdots$$

$$\rightarrow f(a + h, b + k) = f(a, b) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \cdots$$

問 $F^{(n)}(0)$ は、どのように表されるだろうか?

合成関数 $F(t) = f(a + ht, b + kt)$ の導関数

合成関数の微分 (p.59 定理 2.)

$$\frac{d}{dt}f(\varphi(t), \psi(t)) = f_x(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)$$

$$F(t) = f(a + ht, b + kt), \quad (a, b, h, k \text{ は定数})$$

$$F'(t) = f_x(a + ht, b + kt) \cdot (a + ht)' + f_y(a + ht, b + kt) \cdot (b + kt)'$$

$$= f_x(a + ht, b + kt)h + f_y(a + ht, b + kt)k$$

$$\therefore F'(0) = f_x(a, b)h + f_y(a, b)k$$

合成関数 $F(t) = f(a + ht, b + kt)$ の2次導関数

合成関数の微分 (p.59 定理 2.)

$$\frac{d}{dt}f(\varphi(t), \psi(t)) = f_x(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)$$

$$F(t) = f(a + ht, b + kt), \quad (a, b, h, k \text{ は定数})$$

$$F'(t) = f_x(a + ht, b + kt)h + f_y(a + ht, b + kt)k, \quad F'(0) = f_x(a, b)h + f_y(a, b)k$$

$$F''(t) = \frac{d}{dt}\{f_x(a + ht, b + kt)\}h + \frac{d}{dt}\{f_y(a + ht, b + kt)\}k$$

$$= \{f_{xx}(a + ht, b + kt)h + f_{xy}(a + ht, b + kt)k\}h$$

$$+ \{f_{yx}(a + ht, b + kt)h + f_{yy}(a + ht, b + kt)k\}k$$

$$= f_{xx}(a + ht, b + kt)h^2 + 2f_{xy}(a + ht, b + kt)hk + f_{yy}(a + ht, b + kt)k^2$$

$$\therefore F''(0) = f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2$$

合成関数 $F(t) = f(a + ht, b + kt)$ の高次導関数

- $F(t) = f(a + ht, b + kt), \quad (a, b, h, k \text{ は定数})$
- $F'(t) = f_x(a + ht, b + kt)h + f_y(a + ht, b + kt)k$
- $F'(0) = f_x(a, b)h + f_y(a, b)k$
- $F''(t) = f_{xx}(a + ht, b + kt)h^2 + 2f_{xy}(a + ht, b + kt)hk + f_{yy}(a + ht, b + kt)k^2$
- $F''(0) = f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2$

$\rightarrow F''(t)$, および $F''(0)$ の右辺において、2次の偏導関数の係数に着目すると、 $(h+k)^2$ の各項であることに気づく。

⋮

- 一般に、 $F^{(n)}(0) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a, b) = \sum_{j=0}^n {}_n C_j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-j} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a, b)$

2変数関数のテイラー展開, マクローリン展開

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \cdots$$

$$= f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k$$

$$+ \frac{1}{2} \left(f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2 \right) +$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a, b) + \cdots$$

\downarrow ($a + h = x, b + k = y$ とおくと)

テイラー展開 $f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b) + \cdots$

\downarrow ($a = 0, b = 0$ とおくと)

マクローリン展開 $f(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \cdots$