べき級数とは

- 級数とは？
  → 数列 $\{a_n\}$ の各項を順に加えた式のこと．(p.15 を参照)
- べき級数とは？
  → 級数の各項が x のべき関数 $c_n x^n$ である級数のこと（c_n は定数）．

事実（今回のテーマ）

どんな関数も，べき級数（無限次の多項式関数）として表すことができる．

関数のべき級数展開

テイラーの定理

関数 $f(x)$ が $a < b$ を含む開区間で n 回微分可能ならば，

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \boldsymbol{R_n}.$$

関数のべき級数展開

関数 $f(x)$ が $x = a$ を含む，ある区間で何回でも微分可能であるならば，

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

となる．つまり，$a - \rho < x < a + \rho$ において，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(x)$.

テイラー展開，マクローリン展開

- テイラーの定理（p.62 定理 1.）
  - R_n を剰余項という（他の表し方もある）．
  - $n = 1$ のときは，平均値の定理（p.46 定理 8.）
  - 定理の証明には，ロルの定理（p.45 定理 7.）が使われる．
    ロルの定理は，「$f(a) = f(b)$ を満たす関数に対する平均値の定理」

$\downarrow$ $a = 0$ の場合

- マクローリンの定理（p.63 定理 1.）
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ ならば，...
  - $f(x)$ は無限級数として表すことができる．
  - これを満たす x の最大範囲が $a - \rho < x < a + \rho$ のとき，ρ のことを $f(x)$ の収束半径という．

マクローリン級数を求めるには？

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

- 上の式中で未知なのは，$x = 0$ のおける $f(x)$ の値，および微分係数たち．
- 一般の n の対して，$f^{(n)}(0)$ がわかればよい．(例 1, 2, 3)

例）
$$\begin{cases}
e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots & (\rho = \infty) \\
\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \dfrac{x^{2m}}{(2m)!} + \cdots & (\rho = \infty) \\
\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^m \dfrac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots & (\rho = \infty) \\
\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \cdots & (\rho = 1) \\
\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^n}{n} + \cdots & (\rho = 1)
\end{cases}$$

べき級数展開の応用：近似値の計算

- テイラー級数における有限の n までの式

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

を，$f(x)$ の n 次近似式という．
  - １次近似：$y = f(a) + f'(a)(x-a)$ 　（$x = a$ における接線）
  - ２次近似：$y = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2$

    $\vdots$

- $x = a + h$ とした式

$$f(a+h) \fallingdotseq f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n$$

は，h が十分小さければ，$f(a+h)$ の近似値と解釈できる．(p.64 注意)

２変数関数のべき級数展開（次回のテーマ）

２変数関数 $f(x, y)$ に対し，

1) $x(t) = a + ht$, $y(t) = b + kt$（a, b, h, k は定数）との合成関数を考える；
   $F(t) := f(a + ht, b + kt)$
2) $F(t)$ をマクローリン展開すると，
   $F(t) = F(0) + F'(0)t + \dfrac{F''(0)}{2}t^2 + \cdots + \dfrac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n + \cdots$
3) $t = 1$ のとき，
   $F(1) = F(0) + F'(0) + \dfrac{F''(0)}{2} + \cdots + \dfrac{F^{(n)}(0)}{n!} + \cdots$

   $\to$ $f(a+h, b+k) = f(a, b) + F'(0) + \dfrac{F''(0)}{2} + \cdots + \dfrac{F^{(n)}(0)}{n!} + \cdots$
   - $F^{(n)}(0)$ は，h, k の n 次多項式として表すことができる．
   - その係数は $f(x, y)$ の点 (a, b) における偏微分係数．