２次偏導関数

- （復習）２変数関数 $f(x,y)$ の偏導関数は２つあった.
  - x に関する偏導関数 $f_x(x,y)$
  - y に関する偏導関数 $f_y(x,y)$
- 偏導関数もまた２変数関数なので, それらを偏微分することができる.
  - $f_x(x,y)$ の $\begin{cases} x \text{ に関する偏導関数} & f_{xx}(x,y), \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), \dots \\ y \text{ に関する偏導関数} & f_{xy}(x,y), \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y), \dots \end{cases}$
  - $f_y(x,y)$ の $\begin{cases} x \text{ に関する偏導関数} & f_{yx}(x,y), \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y), \dots \\ y \text{ に関する偏導関数} & f_{yy}(x,y), \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y), \dots \end{cases}$
- $f_{xy}(x,y), f_{yx}(x,y)$ がともに連続ならば, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$ である.
  つまり, 微分の順序は交換可能である.

高次偏導関数

- $f_{xx}(x,y), f_{xy}(x,y)\,(= f_{yx}(x,y)), f_{yy}(x,y)$ を２次偏導関数という.
- $f(x,y)$ の３次偏導関数とは, 次の４つの関数のことである;
  - $f_{xxx}(x,y), \quad \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y)$
  - $f_{xxy}(x,y)\,(= f_{xyx}(x,y) = f_{yxx}(x,y)), \quad \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y)$
  - $f_{xyy}(x,y)\,(= f_{yxy}(x,y) = f_{yyx}(x,y)), \quad \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y)$
  - $f_{yyy}(x,y), \quad \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y)$

  $\vdots$
- 同様に, n 次偏導関数が定義できる.
- 本講義で扱う関数は, 何回でも偏微分ができて, その偏導関数が連続なものとする.

合成関数とその微分

- （復習）２つの関数 $y = f(t)$ と $t = g(x)$ に対して, $y = f(g(x))$ で定まる独立変数 x の関数を, 「f と g の合成関数」といい, その微分は

$$y' = f'(g(x))\,g'(x), \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dt}(g(x))\,\frac{dg}{dx}(x), \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx}$$

- 「1 変数関数の合成関数の微分」の効用：
  複雑に見える関数も, いくつかの単純な関数の合成関数と見ることができれば, 微分が計算できる.

2 変数関数の合成関数とその微分

(1) ２つの１変数関数 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ に対し,
$z(t) := f(\varphi(t), \psi(t))$ は独立変数 t の１変数関数なので, 導関数 $z'(t), \dots$ を考えることができる. p.59 定理 2.
$\longrightarrow$ 関数を平面の曲線へ制限すること

(2) ２つの２変数関数 $x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v)$ に対し,
$z(u,v) := f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$ は独立変数 u, v の２変数関数なので, 偏導関数 $z_u(u,v), z_v(u,v), \dots$ を考えることができる. p.59 定理 3.
$\longrightarrow$ 座標変換

(3) $\dots$

2 変数関数の合成関数とその微分（例）

(1) 定義域を平面内の曲線 $(x,y) = (\varphi(t), \psi(t))$ に制限すること

例１）$\begin{cases} \varphi(t) = \cos t \\ \psi(t) = \sin t \end{cases}$ ：原点を中心とする半径 1 の円

例２）$\begin{cases} \varphi(t) = a + ht \\ \psi(t) = b + kt \end{cases}$ ：点 (a,b) を通り, ベクトル (h,k) に平行な直線

(2) 平面の座標変換

例３）$\begin{cases} \varphi(r,t) = r\cos t \\ \psi(r,t) = r\sin t \end{cases}$ ：極座標