

(1変数) 関数とは

- 2つの変数 x, y がある。
(変数とは、いろいろな値をとる文字のこと)
- 変数 x の値を決めると、それに応じて y の値が決まるとき、

「 y は x の (1変数) 関数である」

という. このとき, $\begin{cases} x & \text{を独立変数} \\ y & \text{を従属変数} \end{cases}$ という.

- 変数 y が独立変数 x の関数であることを, 一般的に $y = f(x)$ と書く.
 - f は 「 x に対して, $y (= f(x))$ を対応させる規則」と解釈できる.
 - 「 x の関数」とは 「 x で記述される式 $f(x)$ 」と考えてよい.

(2変数) 関数とは

- 3つの変数 x, y, z がある.
- 変数 x と y の値を決めると、それに応じて z の値が決まるとき、

「 z は x, y の 2変数関数である」

という. このとき, $\begin{cases} x, y & \text{を独立変数} \\ z & \text{を従属変数} \end{cases}$ という.

- 変数 z が独立変数 x, y の関数であることを, 一般的に $z = f(x, y)$ と書く.
 - f は 「 x, y に対して, $z (= f(x, y))$ を対応させる規則」.
 - 「 x, y の関数」とは 「 x, y で記述される式 $f(x, y)$ 」.
- ★ x, y を xy -平面内の点の座標 (x, y) と思うと, 2変数関数とは,

「平面の点 $P(x, y)$ に対して, 数 $f(x, y)$ を対応させること」

と考えることができる ($z = f(P)$) と書くこともある).

定義域と値域

関数 $z = f(x, y)$ に対し,

- 変数 x, y のとる範囲 (点 (x, y) が動きうる領域)のことを, 「関数 $f(x, y)$ の定義域」という.
- 点 (x, y) を関数 $f(x, y)$ の定義域内の点とすると, z がとる値の範囲のことを「関数 $f(x, y)$ の値域」という.

関数 $f(x, y)$ の $\begin{cases} \text{定義域は} & \text{平面内の領域} \\ \text{値域は} & \text{数直線上の区間} \end{cases}$

2変数関数の可視化 (グラフと等高線)

- 2変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフとは, $(a, b, f(a, b))$ と表される空間内の点全体のこと (ただし, (a, b) は関数 f の定義域内の点).
 - $f(a, b)$ は (a, b) 地点における「標高」と解釈できる.
 - $z = f(x, y)$ のグラフは「曲面」となる.
 - 点 (a, b, c) が $z = f(x, y)$ のグラフ上の点である.
(または, $z = f(x, y)$ のグラフが点 (a, b, c) を通る)
 $\iff (a, b, c)$ が関係式 $c = f(a, b)$ を満たす.
- 2変数関数 $z = f(x, y)$ の等高線とは, 同じ高さの点の集まりのできる曲線のこと.
 - 方程式 $f(x, y) = h$ を満たす平面内の点 (x, y) の全体 (h は定数).

1変数関数の微分

- 関数 $y = f(x)$ の $x = a$ における微分係数とは, 数

$$f'(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

のこと.

- 上の極限が存在するとき, 「 $y = f(x)$ は $x = a$ で微分可能である」という.
- 関数 $y = f(x)$ の導関数とは, x に対して $f'(x)$ を対応させる関数のこと;

$$f'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- 記号: $f'(x)$, y' , $\frac{df}{dx}(x)$, $\frac{dy}{dx}$
- 導関数を求めることを関数を「微分する」という.

2変数関数の偏微分

- 2変数関数 $z = f(x, y)$ の偏導関数とは, 2つの変数のうち一方を定数と見なして, もう一方の変数に関して微分した関数のこと.
 - 「 x に関する偏導関数」とは, y を定数とみなして, x で微分した関数
記号: $f_x(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, z_x , $\frac{\partial z}{\partial x}$
 - 「 y に関する偏導関数」とは, x を定数とみなして, y で微分した関数
記号: $f_y(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, z_y , $\frac{\partial z}{\partial y}$
 - 偏導関数を求めることを「関数を偏微分する」という.
- 【注意】
 - 2変数関数についても, 「偏微分係数」「偏微分可能性」の概念が定義できる.
 - $f(x, y)$ がある領域で偏微分可能であるとき, 偏導関数が定義される.