科 目 名　数学 I-J　　　出 題 者 名　佐藤 弘康

1 ベクトル $\boldsymbol{a}=(x,2,-1), \boldsymbol{b}=(-2,-4,y)$ に対し, 次の問に答えなさい.

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するような x,y の組を 1 つ挙げなさい.

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するのは, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$, すなわち,

$$-2x-8-y=0$$

が成り立つときである. これを満たす x,y の組は無数にある. 例えば, $x=-3, y=-2$ など.　【5 点】

(2) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が 1 次従属となるような x,y の組を 1 つ挙げなさい.

$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が 1 次従属となるのは, $c_1\boldsymbol{a}+c_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ を満たす $(c_1,c_2)\neq(0,0)$ が存在することである. これは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行, つまり $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$ となるときである.

$$(x,2,-1)=k(-2,-4,y)=(-2k,-4k,ky)$$

の各成分を比較することにより, $x=-2k, 2=-4k, -1=ky$ を得る. 第 2 式より, $k=-\frac{1}{2}$. よって, 第 1 式より $x=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\mathbf{1}$, 第 3 式より $y=-\frac{1}{k}=\mathbf{2}$ であることがわかる.　【5 点】

(3) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が 1 次独立となるような x,y の組を 1 つ挙げなさい.

$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が 1 次独立となるのは, 1 次従属ではないときなので, (2) で求めた x,y 以外の値であればよい. 例えば, $x=\mathbf{2}$, $y=\mathbf{1}$ など.　【5 点】

2 $\boldsymbol{a}=(1,-2,0,1)$ と $\boldsymbol{b}=(1,1,0,-1)$ に対し,

(1) 大きさ $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$

(2) 内積 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$

(3) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$

の値を求めなさい.

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+0^2+1^2}=\sqrt{\mathbf{6}}\quad【3 点】$$

$$|\boldsymbol{b}|=1^2+1^2+0^2+(-1)^2=\sqrt{\mathbf{3}}\quad【3 点】$$

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=1\times1+(-2)\times1+0\times0+1\times(-1)=\mathbf{-2}\quad【3 点】$$

$$\cos\theta=\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}=\frac{-2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}=-\frac{2}{3\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{3}}\quad【3 点】$$

3 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ から, グラムシュミットの方法によって, 正規直交系を作りなさい.

$$\boldsymbol{u}_1=\frac{1}{|\boldsymbol{a}_1|}\boldsymbol{a}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.\quad【3 点】$$

$$\boldsymbol{u}_2'=\boldsymbol{a}_2-(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1$$

$$=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_2=\frac{1}{|\boldsymbol{u}_2'|}\boldsymbol{u}_2'=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.\quad【5 点】$$

$$\boldsymbol{u}_3'=\boldsymbol{a}_3-(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1-(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2$$

$$=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}-\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.\quad【5 点】$$

4 部分空間に関する以下の文を読んで, 空欄に当てはまる最も適切な言葉, 数または式を回答欄に書きなさい.

$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ に対し, $\boldsymbol{a}_1$ が生成する部分空間を W_1, $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ が生成する部分空間を W_2 とする. つまり, $W_1=\langle\boldsymbol{a}_1\rangle$, $W_2=\langle\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\rangle$ である. W_1 と W_2 の和は $\boxed{(1)}$ に等しい. なぜなら, $\boldsymbol{a}_1=\boxed{(3)}\boldsymbol{a}_2+\boxed{(4)}\boldsymbol{a}_3$ となり, $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ は 1 次 $\boxed{(2)}$ ではないからである. このことから, W_1 と W_2 の積は $\boxed{(5)}$ に等しいこともわかる.

(解答欄)

(1)		(2)	
(3)		(4)	
(5)			

(1) $\boldsymbol{W_2}$　(2) **独立**　(3) $\mathbf{-2}$　(4) $\mathbf{3}$　(5) $\boldsymbol{W_1}$　【各 2 点】

5 集合 $W = \{(a+b, a-b, 1) \in R^3 \mid a, b \in R\}$ が R^3 の部分空間であるか否か判定しなさい．

部分空間ではない．　【5 点】
W のベクトルは，第 3 成分が必ず 1 であるため，W は零ベクトルを含まない．部分空間は必ず零ベクトルを含むので，W は部分空間ではない．　【5 点】

6 R^2 の線形変換 $f : R^2 \to R^2$ は

$$f(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2) = -4\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2,$$
$$f(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = 2\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2$$

を満たすとする（ただし，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は R^2 の基本ベクトル）．また，線形変換 g の表現行列を $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする．このとき，次の各問に答えなさい．

(1) f の表現行列 A を求めなさい．

$$f(\boldsymbol{e}_1) - f(\boldsymbol{e}_2) = -4\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2,$$
$$f(\boldsymbol{e}_1) + f(\boldsymbol{e}_2) = 2\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2$$

より，2 式の各辺を加えると $2f(\boldsymbol{e}_1) = -2\boldsymbol{e}_1 + 6\boldsymbol{e}_2$ を得る．よって，

$$f(\boldsymbol{e}_1) = -\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

これを上の第 2 式に代入すると

$$f(\boldsymbol{e}_2) = 2\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 - f(\boldsymbol{e}_1) = 3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

よって，表現行列は $A = (f(\boldsymbol{e}_1)\ f(\boldsymbol{e}_2)) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ である．　【8 点】

(2) f と g^{-1} の合成 $f \circ g^{-1}$ の表現行列を求めなさい．

g の逆変換 g^{-1} の表現行列は，$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ である【3 点】．よって，$f \circ g^{-1}$ の表現行列は

$$AB^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}.$$

【4 点】

7 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$ の固有値と，対応する固有ベクトルを求めなさい．また，A が対角化可能か否か答えなさい．

固有多項式は

$$f_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 2 \\ -4 & -6-t \end{vmatrix} = t^2 + 3t - 10 = (t+5)(t-2).$$

よって，固有値は -5 と 2 である．　【2 点】
固有値 -5 に対する固有ベクトルは $k\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$【2 点】，
固有値 2 に対する固有ベクトルは $l\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$【2 点】
である（k, l は 0 でない実数）．
行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ とおけば，P は正則行列なので，$P^{-1}AP$ は対角行列となる．よって，対角化可能であるである【4 点】．

8 直交行列 P を用いて $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ と変換することにより，2 次形式 $x^2 + 4xy - 2y^2$ は $\alpha X^2 + \beta Y^2$ となる．α, β と P を求めなさい．

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ とおくと，この 2 次形式は

$$x^2 + 4xy - 2y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad 【3 点】$$

と書ける．この行列 A を直交行列で対角化する．

$$f_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ 2 & -2-t \end{vmatrix} = t^2 + t - 6 = (t-2)(t+3)$$

より，固有値は $-3, 2$ である．【2 点】．また，固有ベクトルはそれぞれ $k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, l\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である（k, l は 0 でない実数）【各 2 点】．したがって，各固有ベクトルを正規化したベクトルを並べて行列 $P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ をつくると，P は直交行列で，${}^tPAP = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ である【3 点】．
ここで，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P\boldsymbol{X}$ とおくと，

$$\begin{aligned} x^2 + 4xy - 2y^2 &= {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t(P\boldsymbol{X})AP\boldsymbol{X} = {}^t\boldsymbol{X}({}^tPAP)\boldsymbol{X} \\ &= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ &= -3X^2 + 2Y^2 \end{aligned}$$

となる【3 点】．