1　次の問に答えなさい．

【各 2 点】

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2-x \end{vmatrix} = 0$ を満たす x を求めなさい．

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2-x \end{vmatrix} = 1\times(2-x) - 4\times(-2) = 2 - x + 8 = 10 - x.$$

よって, 上記の行列式が 0 となるのは, $\boldsymbol{x = 10}$ のときである．

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ の値を求めなさい．

まず, 第 2 行で展開してから, 行列式の性質を使って, 行列式を簡約化する;

$$(-1)\times\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -(4-6) = \mathbf{2}.$$

(3) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} は

$$\frac{1}{\boxed{\mathbf{5}}}\begin{pmatrix} 3 & \boxed{\mathbf{-7}} & \boxed{\mathbf{2}} \\ -4 & \boxed{\mathbf{11}} & -1 \\ \boxed{\mathbf{-1}} & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ である．

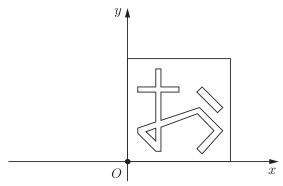
各空欄にあてはまる値を求めなさい．

余因子行列と逆行列の関係式より, 求めるものは, $|A|$, $-|A_{21}|$, $|A_{31}|$, $|A_{22}|$, $|A_{13}|$ である．ただし, A_{ij} は, 行列 A から第 i 行と第 j 列を取り除いた小行列である．

2　次の (1)〜(4) の各図は, 平面における 1 次変換によって (0) の図を変換した像である．各 1 次変換の名称を **(ア)** 〜 **(カ)** の中から, 1 次変換を表す行列を **(あ)** 〜 **(か)** の中からそれぞれ選び, 図右の解答欄に書きなさい．

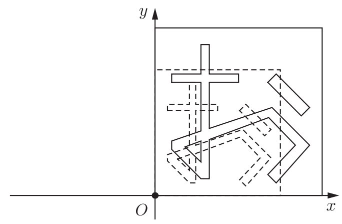
【各 1 点】

(0)



解答欄

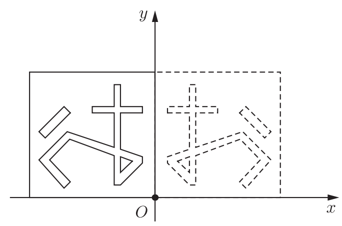
(1)



名称 **(オ)**

行列 **(か)**

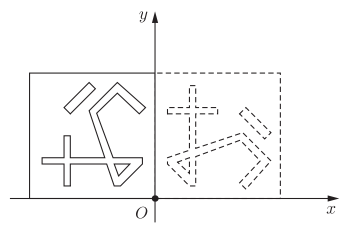
(2)



名称 **(カ)**

行列 **(お)**

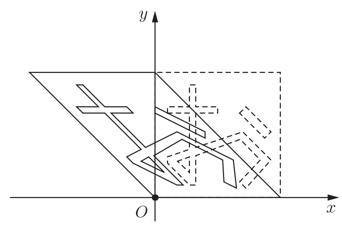
(3)



名称 **(ア)**

行列 **(あ)**

(4)



名称 **(イ)**

行列 **(え)**

選択肢：名称

(ア) 回転	**(イ)** せん断	**(ウ)** 恒等変換
(エ) 平行移動	**(オ)** 相似変換	**(カ)** 対称移動

選択肢：行列

(あ) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(い)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(う)** $\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$

(え) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(お)** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(か)** $\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

3 行列 $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix}$ によって表される 1 次変換を f とする．次の問に答えなさい．

【各 3 点】

(1) f による点 $\mathrm{P}(3,2)$ の像の座標を求めなさい．

$$\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\4\end{pmatrix}.$$

よって，求める像の座標は $\mathbf{(9,4)}$ である．

(2) f による点 Q の像が 点 $\mathrm{P}(3,2)$ であるとする．このとき，点 Q の座標を求めなさい．

仮定より，$f(\mathrm{Q})=A\mathrm{Q}=\mathrm{P}$ であるから，$\mathrm{Q}=A^{-1}\mathrm{P}$ である．

$$\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-1&-3\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}9\\4\end{pmatrix}$$

より，点 Q の座標は，$\left(\mathbf{\frac{9}{7},\frac{4}{7}}\right)$ である．

4 行列 $\begin{pmatrix}1&\boxed{}\\\boxed{}&1\end{pmatrix}$ が定める 1 次変換によって点 $(1,2)$ は点 $(5,-1)$ に移る．空欄にあてはまる値を求めなさい．

$$\begin{pmatrix}1&a\\b&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}1+2a\\b+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$$

$1+2a=5,\ b+2=-1$ より，$\boldsymbol{a=2, b=-3}$ である．【3 点】

5 1 次変換 f によって，点 $(1,1)$ は点 $(1,-2)$ に移り，点 $(1,-1)$ は点 $(3,1)$ に移るとする．このとき，f を表す行列を求めなさい．

f を表す行列を A とすると，仮定より，

$$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\qquad A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},$$

すなわち，

$$A\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\-2&1\end{pmatrix}$$

が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned}A&=\begin{pmatrix}1&3\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}^{-1}\\&=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&3\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\\&=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4&2\\1&3\end{pmatrix}=\underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&-3\end{pmatrix}}.\end{aligned}$$

【3 点】

6 xy-平面内の方程式 $2x-y=4$ で表される直線を ℓ とする．次の行列によって表される 1 次変換によって，ℓ がどのような図形に移るか詳細に述べなさい．

【各 3 点】

(1) $\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$

方程式 $2x-y=4$ において，$x=t$ とおくと $y=2t-4$ なので，直線 ℓ 上の点は $(t,2t-4)$ と表すことができる（1 点）．これを 1 次変換すると

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\2t-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5t-8\\7t-8\end{pmatrix},$$

$$\therefore\begin{cases}X=5t-8\\Y=7t-8\end{cases}$$

となる．この 2 式から t を消去すると

$$7X-5Y=(-8)\times7-(-8)\times5=-16$$

となる．よって，ℓ の像は**直線**（1 点）$\boldsymbol{5x-6y=-16}$（1 点）である．

(2) $\begin{pmatrix}2&-1\\-4&2\end{pmatrix}$

(1) と同様に直線 ℓ 上の点を $(t,2t-4)$ と表し，1 次変換すると

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\2t-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix}$$

となるので，ℓ の像は **1 点 $\mathbf{(4,-8)}$** である．