科 目 名 線形代数学 II 出 題 者 名 佐藤 弘康

1 $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ が表す1次変換をそれぞれ f, g とする．次の各問に答えなさい．

(1) A, B はともに**直交行列**であり，かつ**対称行列**である．直交行列と対称行列の説明（定義）として適切なものを以下の中からそれぞれ選びなさい．

(選択肢)

(ア) $M^{-1}M = E$ を満たす正方行列 M のこと．
(イ) ${}^tM\,M = E$ を満たす正方行列 M のこと．
(ウ) $M^{-1} = M$ を満たす正方行列 M のこと．
(エ) ${}^tM = M$ を満たす正方行列 M のこと．
(オ) ${}^tM = -M$ を満たす正方行列 M のこと．
(カ) $|M| = \pm 1$ を満たす正方行列 M のこと．

(解答欄)

直交行列 **(イ)** 対称行列 **(エ)**

【各1点】

(2) A の逆行列を求めなさい．

A は直交行列なので，$A^{-1} = {}^tA$ である．また対称行列なので，${}^tA = A$ である．よって，A の逆行列は A 自身である．

【2点】

(3) 1次変換 g は，ある直線 ℓ に関する対称移動である．直線 ℓ がどのような直線か答えなさい．

$g(x, y) = (x, -y)$ である．これは x 軸に関する対称移動である．

【2点】

(4) 合成変換 $f \circ g$ は原点を中心とする回転変換となる．回転角の大きさ θ を答えなさい．

$f \circ g$ が表す行列は

$$AB = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}.$$

よって，回転角の大きさは $\theta = \frac{\pi}{4}$ である．

【2点】

2 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ が表す1次変換をそれぞれ f, g とする．次の各問に答えなさい．

【各2点】

(1) f の逆変換 f^{-1} による点 P の像が点 $(3, 2)$ であるとき，点 P の座標を求めなさい．

$f^{-1}(\mathrm{P}) = (3, 2)$ より，$f(3, 2) = \mathrm{P}$ である．

$$f(3, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

よって，点 P の座標は $(9, 4)$ である．

(2) g の逆変換 g^{-1} が存在するか否か判定しなさい．存在するならば，逆変換を表す行列を求めなさい．

$|B| = 0$ であるから，g の逆変換は存在しない．

3 ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ は行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ の固有ベクトルである．対応する固有値を求めなさい．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

よって，$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 2 の固有ベクトルである．

【2点】

$\boxed{4}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ が表す 1 次変換を f とする．このとき，以下の問に答えなさい．

(1) A の固有値，固有ベクトルを求めなさい．

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda-4)(\lambda+1)$$

より，A の固有値は $\lambda = -1, 4$ である．【2 点】
方程式 $(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は，(i) $\lambda = -1$ のとき，

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \therefore x + y = 0$$

(ii) $\lambda = 4$ のとき，

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \therefore 3x - 2y = 0$$

であるから，固有ベクトルは

(i) $\lambda = -1$ のとき，$k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，　(ii) $\lambda = 4$ のとき，$l\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

である（ただし，k, l は 0 でない任意の定数）．【各 2 点】

(2) f で直線 ℓ を移した像が，また ℓ 自身となるような直線 ℓ をすべて求めなさい．

原点を通り，固有ベクトルと平行な直線が f で不変な直線である．よって，$x + y = 0$ と $3x - 2y = 0$.

【各 2 点】

(3) f の不動点をすべて求めなさい（不動点の全体がある図形をなす場合は，その方程式を求めなさい）．ここで，f の不動点とは，$f(\mathrm{P}) = \mathrm{P}$ を満たす点 P のことである．

1 次変換 f の不動点は，固有値 1 に属する固有ベクトルにほかならない．しかし，(1) の結果から，f の行列 A は固有値 1 を持たない．よって，f の不動点は原点のみである．

【2 点】

$\boxed{5}$ 次の各問に答えなさい．

【各 2 点】

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ の固有値を求めなさい．

固有多項式は

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda-2)(\lambda+3).$$

よって，固有値は $\lambda = -3, 2$ である．

(2) 2 次形式 $x^2 + 4xy - 2y^2$ の標準形 $\alpha X^2 + \beta Y^2$ を求めなさい．なお，(x, y) と (X, Y) の関係については答えなくてよい．

この 2 次形式は

$$x^2 + 4xy - 2y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と書ける．(1) の結果から，適当に直交行列 P を選んで，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ と変換することで，

$$x^2 + 4xy - 2y^2 = -3X^2 + 2Y^2$$

となる．

$\boxed{6}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$ に対し，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

が成り立つとする．このとき，a, b, c, d の値を求めなさい．

仮定は，A が行列 P で対角化されることを意味している．右辺の対角行列の $(1,1)$ 成分が 4 であるから，A は固有値 $\lambda = 4$ をもつ．つまり，

$$0 = |A - 4E| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & a-4 \end{vmatrix} = -3a + 12 - 6 = -3(a-2).$$

よって，$a = 2$ となり，行列 A が $\boxed{4}$ の行列 A であることがわかる．$\boxed{4}$ の結果から，4 でない固有値は -1 なので，$d = -1$ である．右辺の対角行列の成分の並び方から，P は A の固有ベクトルを

$$P = \begin{pmatrix} 2l & k \\ 3l & -k \end{pmatrix}$$

の順に並べた行列だが，仮定から対角成分がともに 1 となるので，$l = \frac{1}{2}, k = -1$．よって，$b = -1$, $c = \frac{3}{2}$ である．

【10 点（部分点なし）】